Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences
Semlalia, Marrakech

Année Universitaire 2020-2021
Département de Mathématiques
Filière : SMPC - S2

TD d'Analyse II
Série n°1

Exercice 1.

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \lambda \qquad \text{et} \qquad g(x) = x \;, \qquad \forall x \in [a, b].$$

1) Déterminer les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f et de g associées à la subdivision régulière (D) de $[a, b]$.
2) En déduire que les fonctions f et g sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$, puis calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 2.

On pose

$$f(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \mathrm{e}^x \;, \qquad \forall x \in [0, 1].$$

1) Justifier pourquoi les fonctions f et g sont Riemann-intégrables sur $[0, 1]$.
2) En utilisant les sommes de Darboux, calculer alors $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 3.

1) Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.
En appliquant le théorème de Rolle à la fonction F définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \,,$$

sur $[a, b]$, montrer qu'il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
2) En déduire que si g est une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$, alors il existe au moins un point $\alpha \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = \alpha$.
(on pourra considérer la fonction f définie par $f(x) = g(x) - x$, $\forall x \in [0, 1]$).

Exercice 4.

Montrer que la fonction $G : x \longmapsto G(x) = \displaystyle\int_{\sin(x)}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5.

En utilisant la première formule de la moyenne, calculer les limites suivantes

1) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t$ 2) $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{n^2}^{n^2+n} \frac{\mathrm{Arctg}(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$

Exercice 6.

Déterminer les primitives suivantes

1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}$

2) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+x+1)}$

3) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}$

5) $\displaystyle\int \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int \frac{\sin^3(x)}{2+\cos(x)}\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x.$

Exercice 7.

Calculer les intégrales suivantes

1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\cos(x)\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctg}(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{(x+2)}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\mathrm{d}x.$

Exercice 8.

En utilisant les sommes de Riemann, montrer que les suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ suivantes sont convergentes et calculer leurs limites.

1) $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$

2) $\displaystyle v_n = \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]^{1/n}.$

Exercices de révision

Exercice 9.

Soit a un réel strictement positif et soit f une fonction continue sur $[-a,a]$.

1) Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$

2) Montrer que si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$

Exercice 10.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^n(x)\mathrm{d}x.$$

1) Montrer que I_n est bien définie et que $I_n>0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Calculer I_0 et I_1.

3) Montrer que $I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire les expressions de I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n.

4) Montrer que $I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n = 0.$