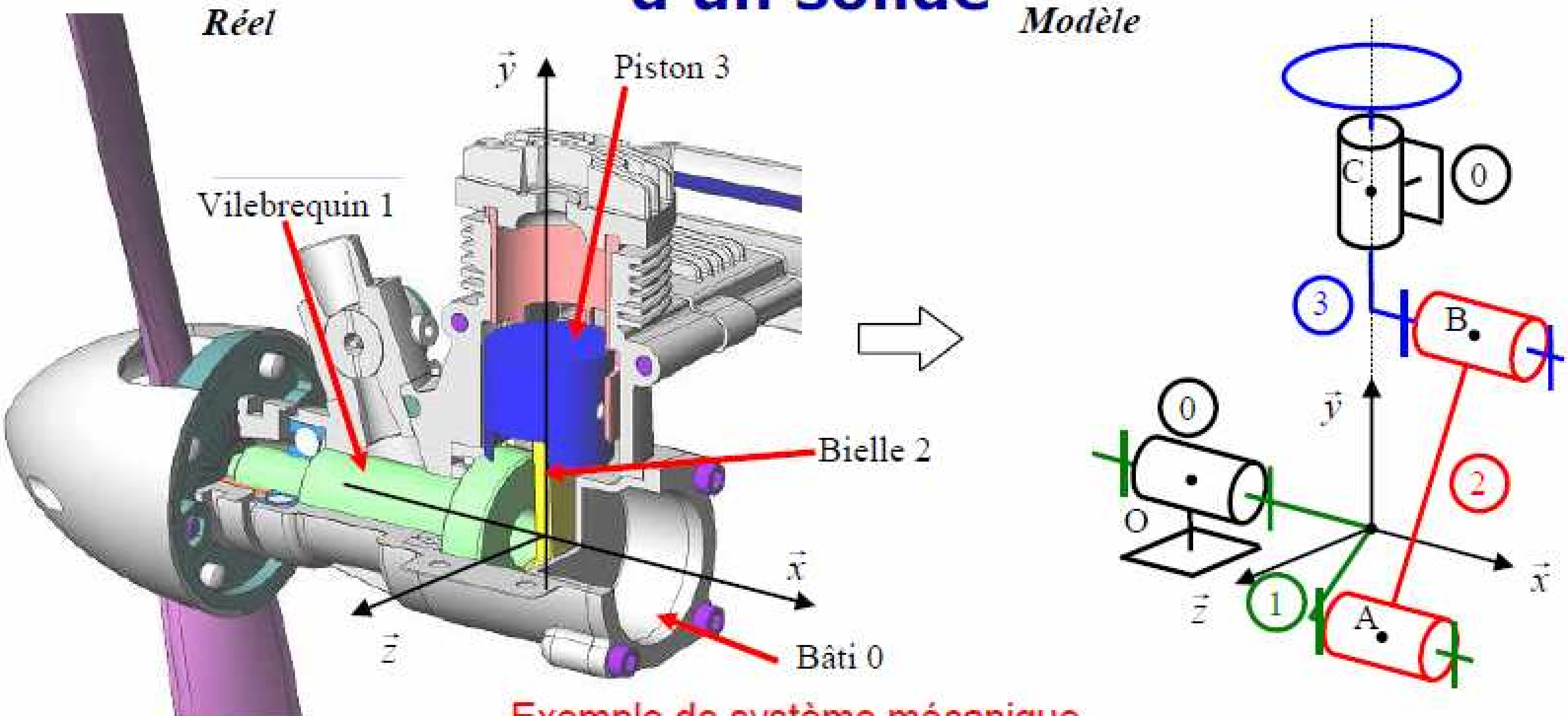
Introduction

La **cinématique d'un solide** en mouvement possède des **particularités** qui permettent une **étude simplifiée du mouvement global** sans avoir à étudier chaque point individuellement. L'objectif de ce cours est de mettre en évidence ces particularités.

Champs des vecteurs vitesse des points d'un solide



Exemple de système mécanique

MOTEUR DE MODELE REDUIT

1. Définition

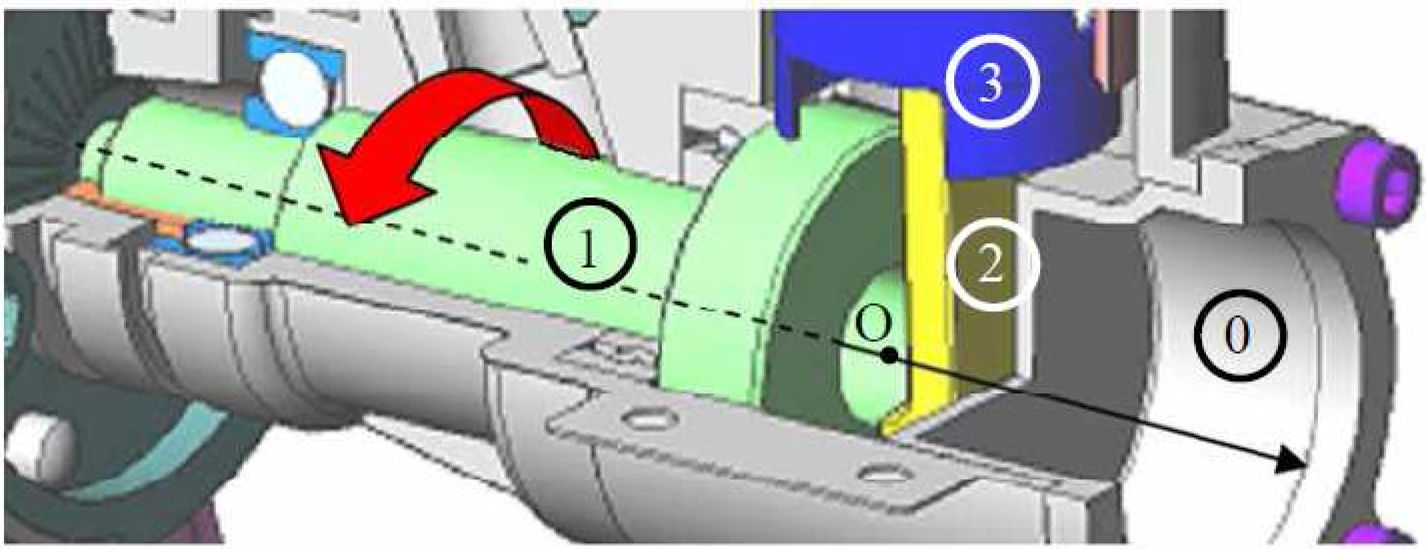
2. Mouvements élémentaires

3. Exemple

4. Torseur cinématique

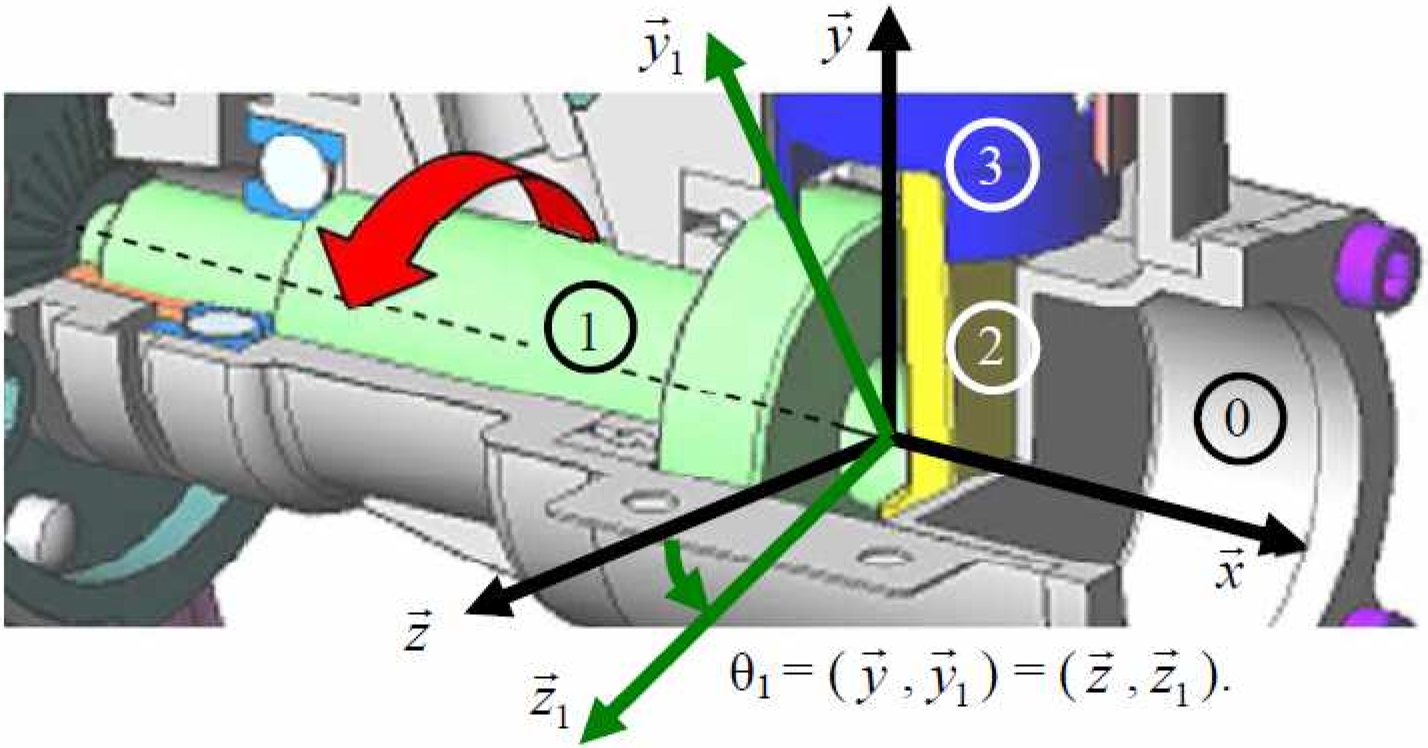
1. Définition

On s'intéresse ici au mouvement de rotation du vilebrequin 1 autour de l'axe $(O,\vec{x})$ par rapport au bâti 0.



1. Définition

On s'intéresse ici au mouvement de rotation du vilebrequin 1 autour de l'axe $(O, \vec{x})$ par rapport au bâti 0.



$\theta_1 = (\vec{y}, \vec{y}_1) = (\vec{z}, \vec{z}_1)$.

1. Définition

2. Mouvements élémentaires

3. Exemple

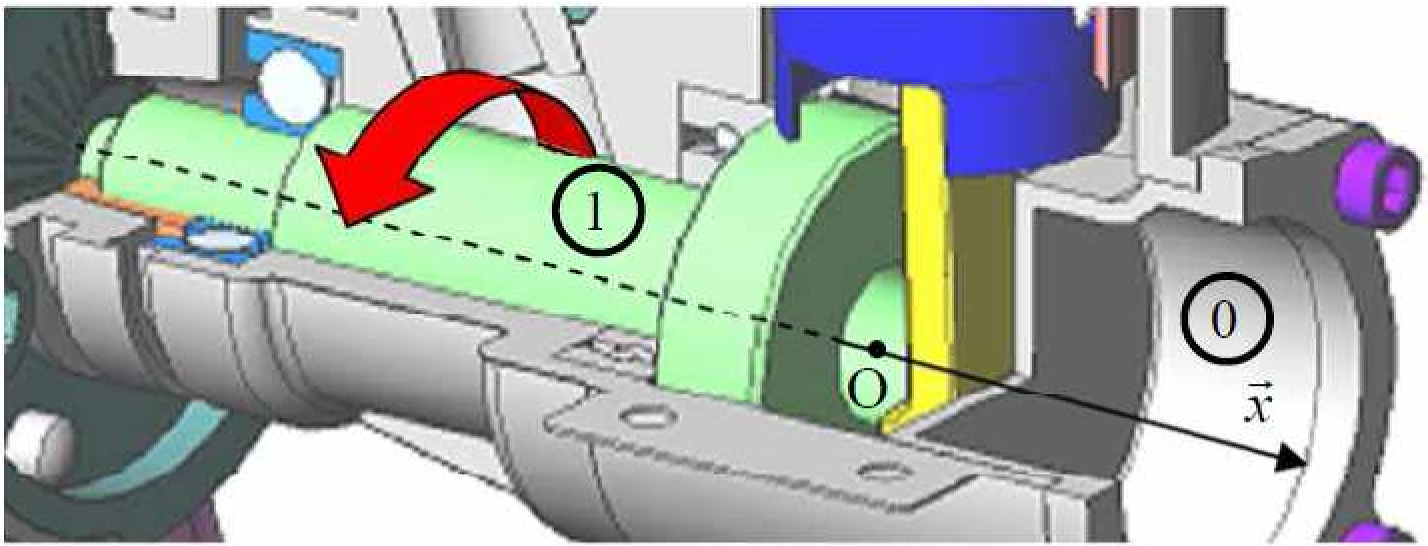
4. Torseur cinématique

2. Mouvements élémentaires

Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

➡ Axe instantané de rotation : axe $(O, \vec{x})$

➡ $\overrightarrow{V_{O \in S/R}} = \vec{0}$



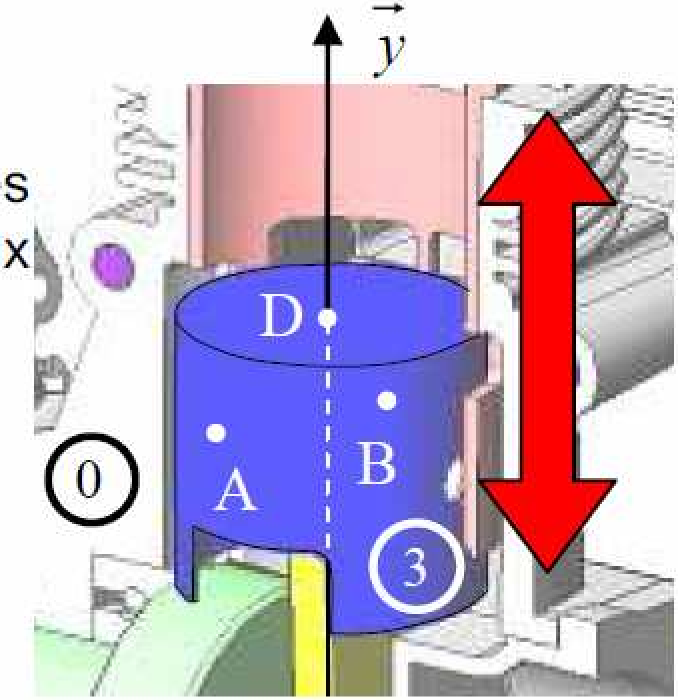
2. Mouvements élémentaires

Mouvement de translation

➡ Tous les vecteurs vitesse des points du piston sont égaux au cours du mouvement

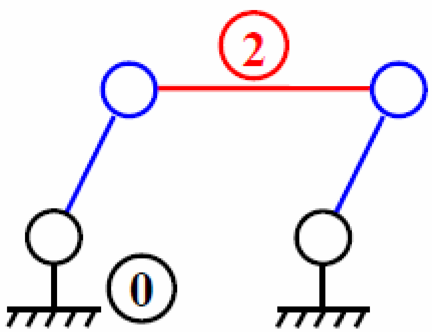
$$\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \overrightarrow{V_{B\in S/R}}$$

∇ A et B $\in$ (S).



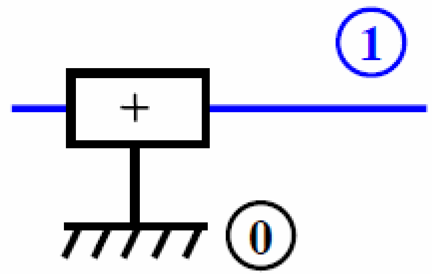
2. Mouvements élémentaires

Mouvement de translation

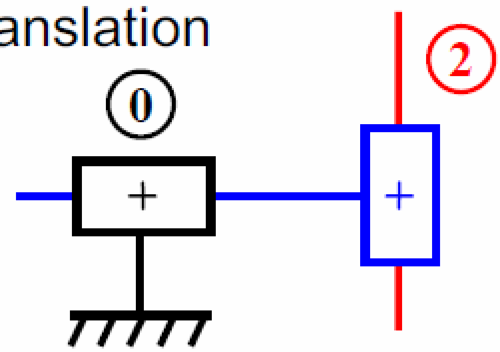


Translation circulaire

Translation rectiligne



Translation



1. Définition

2. Mouvements élémentaires

3. Exemple

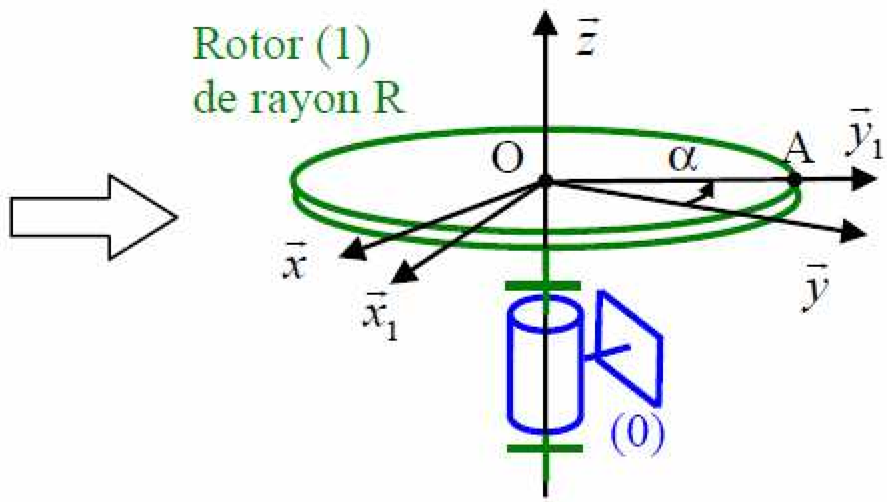
4. Torseur cinématique

3. Exemple

Système réel

Turbine bulbe de basse chute ALSTOM

Modèle



4. Torseur cinématique

Pour caractériser de manière condensée le champ des vecteurs vitesse d'un solide en mouvement par rapport à un repère R, on utilise un outil mathématique appelé torseur

$$\{C_{S/R}\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{matrix} \right\}$$

4. Torseur cinématique

Torseurs particuliers

Le solide S est immobile /R

$$\{C_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_A \qquad \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\Omega_{S/R}} . \overrightarrow{V_{A\in S/R}} = 0 \end{array}$$

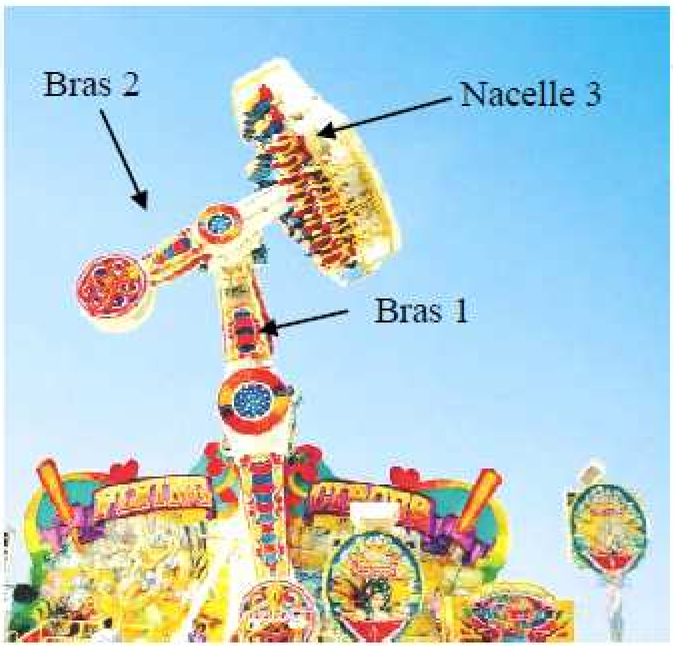
Le solide S est en mouvement de translation/R

$$\{C_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \neq \vec{0} \end{Bmatrix}_A \qquad \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \\ \overrightarrow{\Omega_{S/R}} . \overrightarrow{V_{A\in S/R}} = 0 \end{array}$$

Pour aborder une étude cinématique, on s'intéresse systématiquement à la **nature du mouvement** des solides et on constate souvent que ce mouvement peut être complexe. Pour calculer un vecteur vitesse, il peut donc être judicieux de **décomposer ce mouvement complexe en plusieurs mouvement simples** : c'est la **composition de mouvement**.

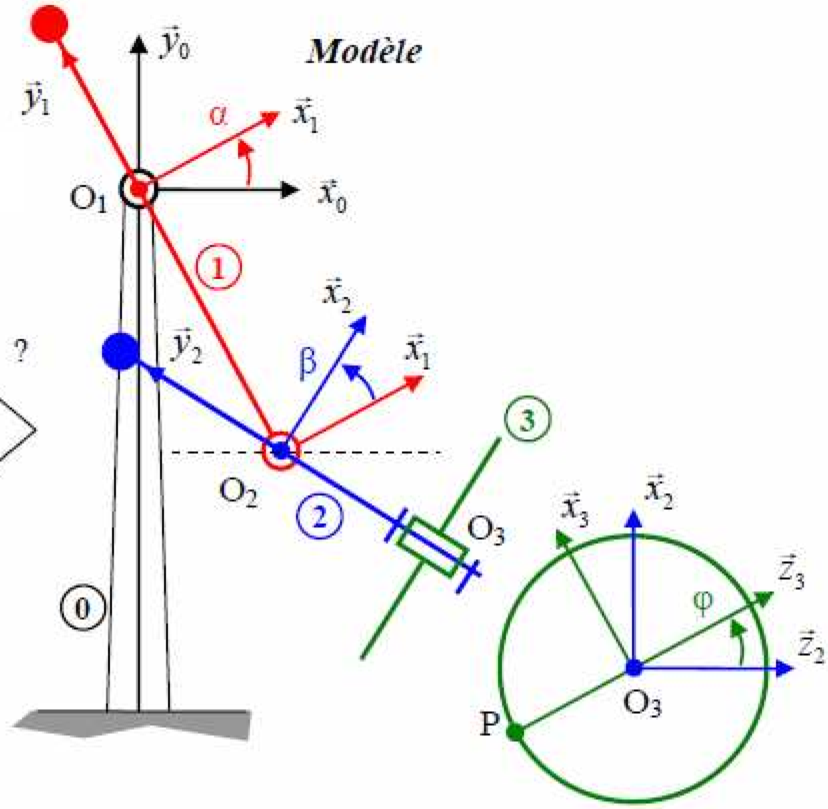
Composition de mouvement

Système réel

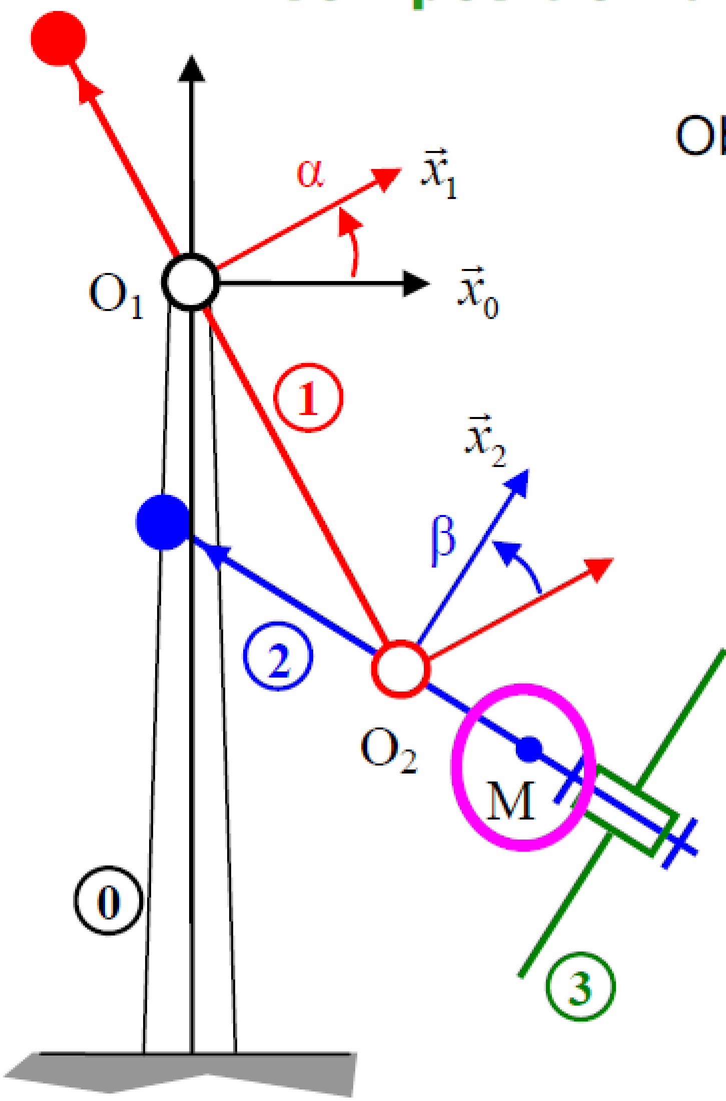


$\overrightarrow{\Gamma_{P\in 3/0}}$?

Modèle

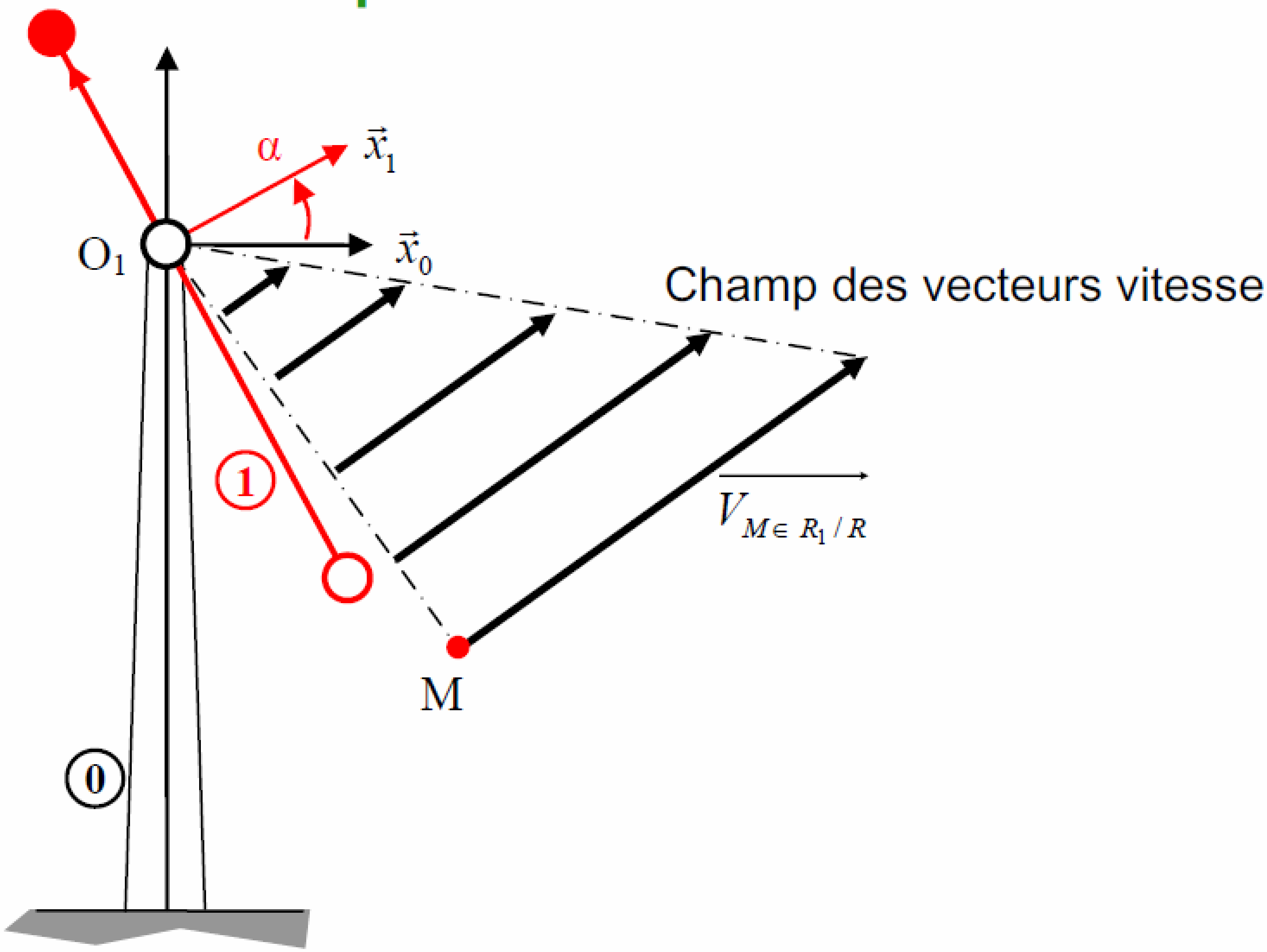


1. Composition des vecteurs vitesse

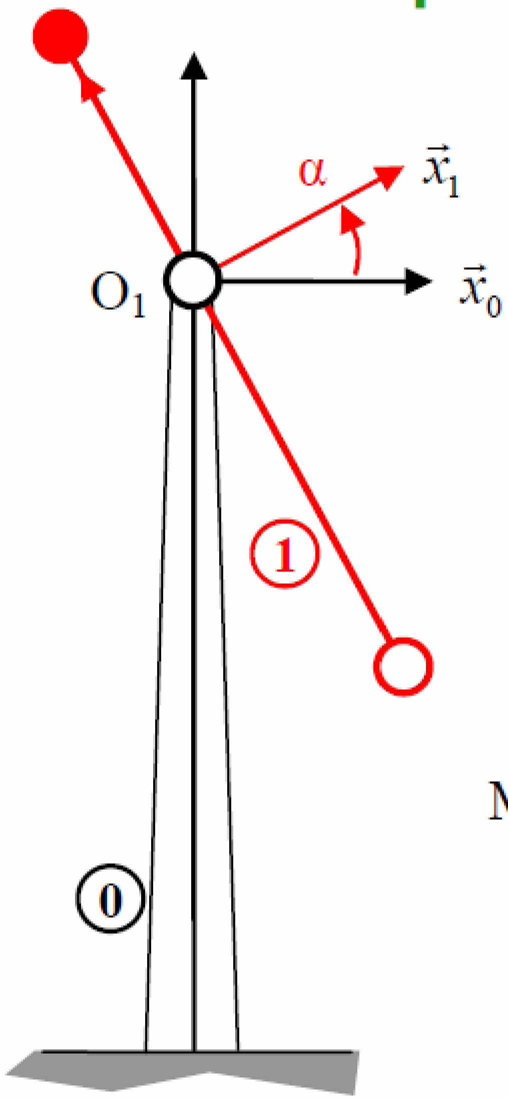


Objectif : $\overrightarrow{V_{M\in 2/R}}$

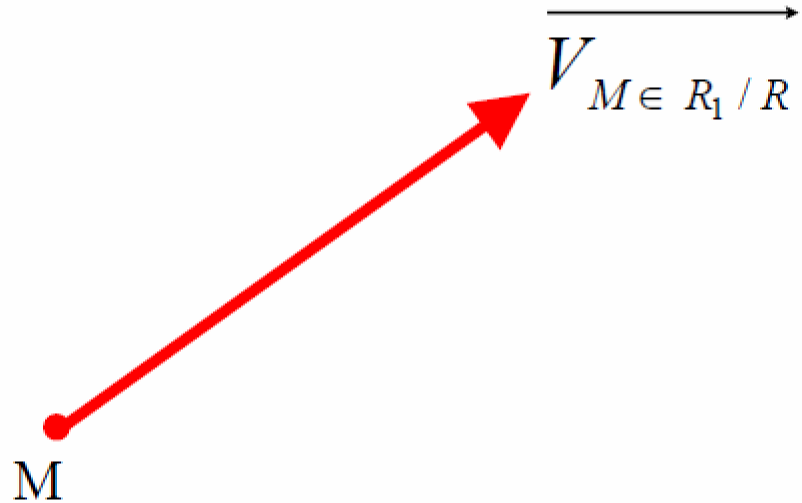
1. Composition des vecteurs vitesse



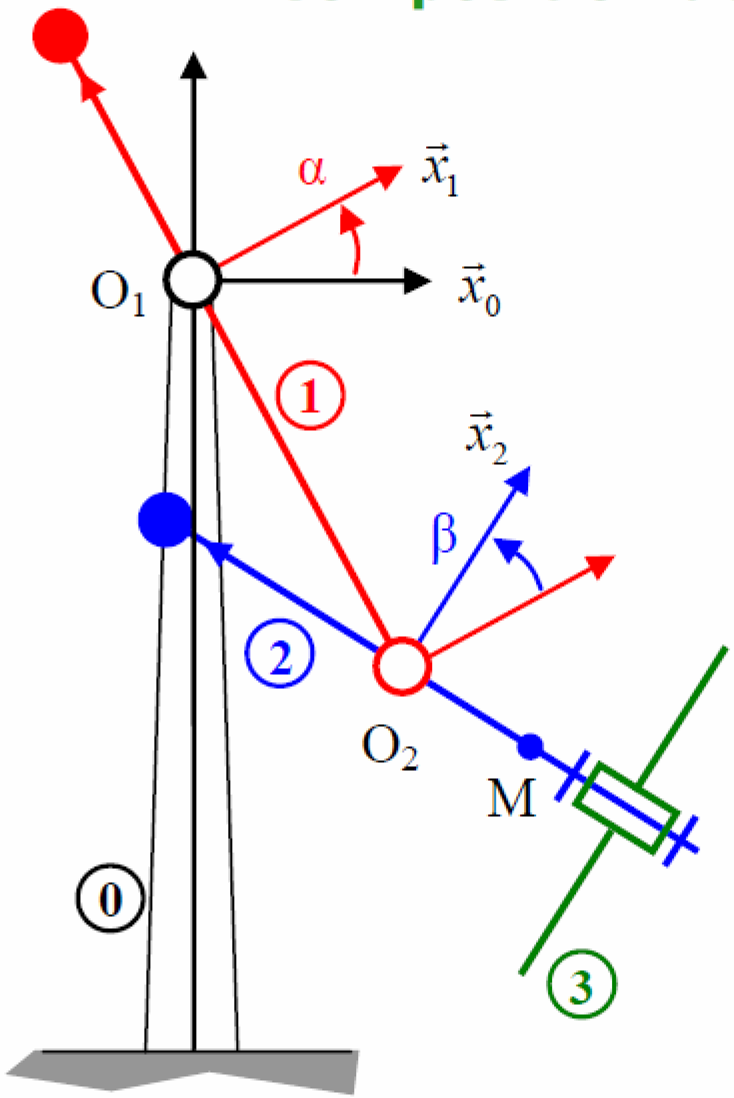
1. Composition des vecteurs vitesse



Rotation autour de l'axe ($O_1, \vec{z}$)



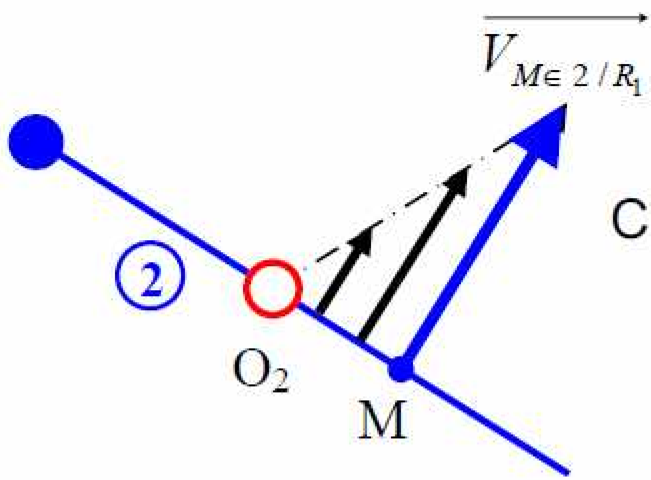
1. Composition des vecteurs vitesse



Rotation autour de l'axe $(O_2, \vec{z})$

1. Composition des vecteurs vitesse

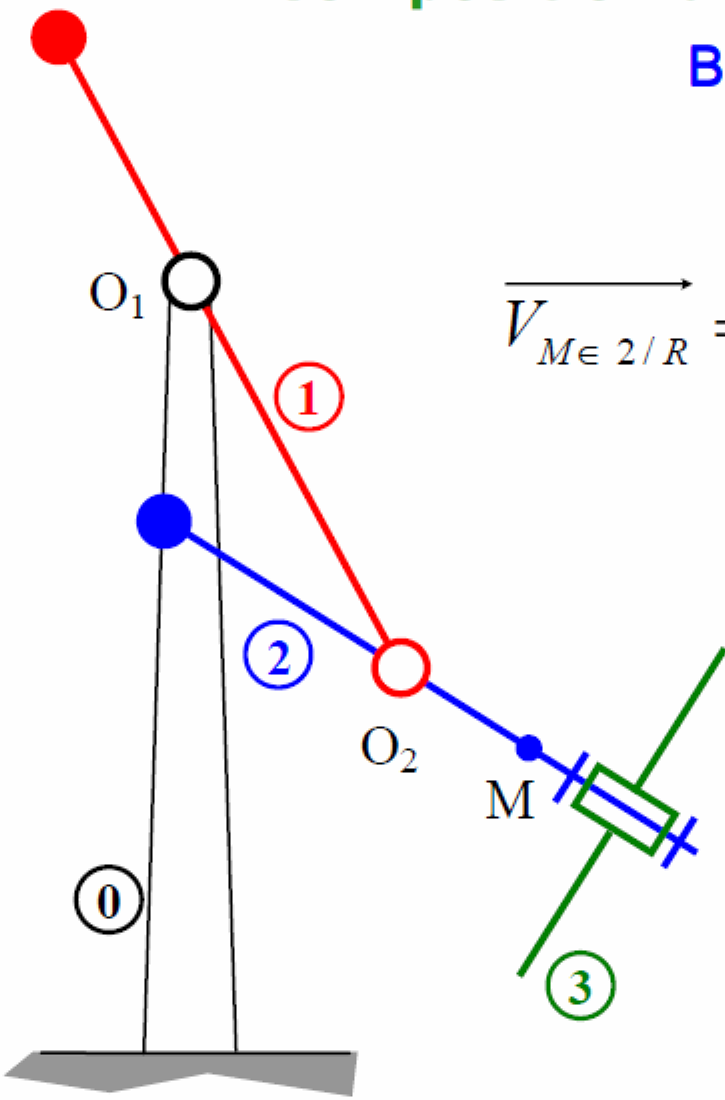
Rotation autour de l'axe (O_2, $\vec{z}$)



Champ des vecteurs vitesse

1. Composition des vecteurs vitesse

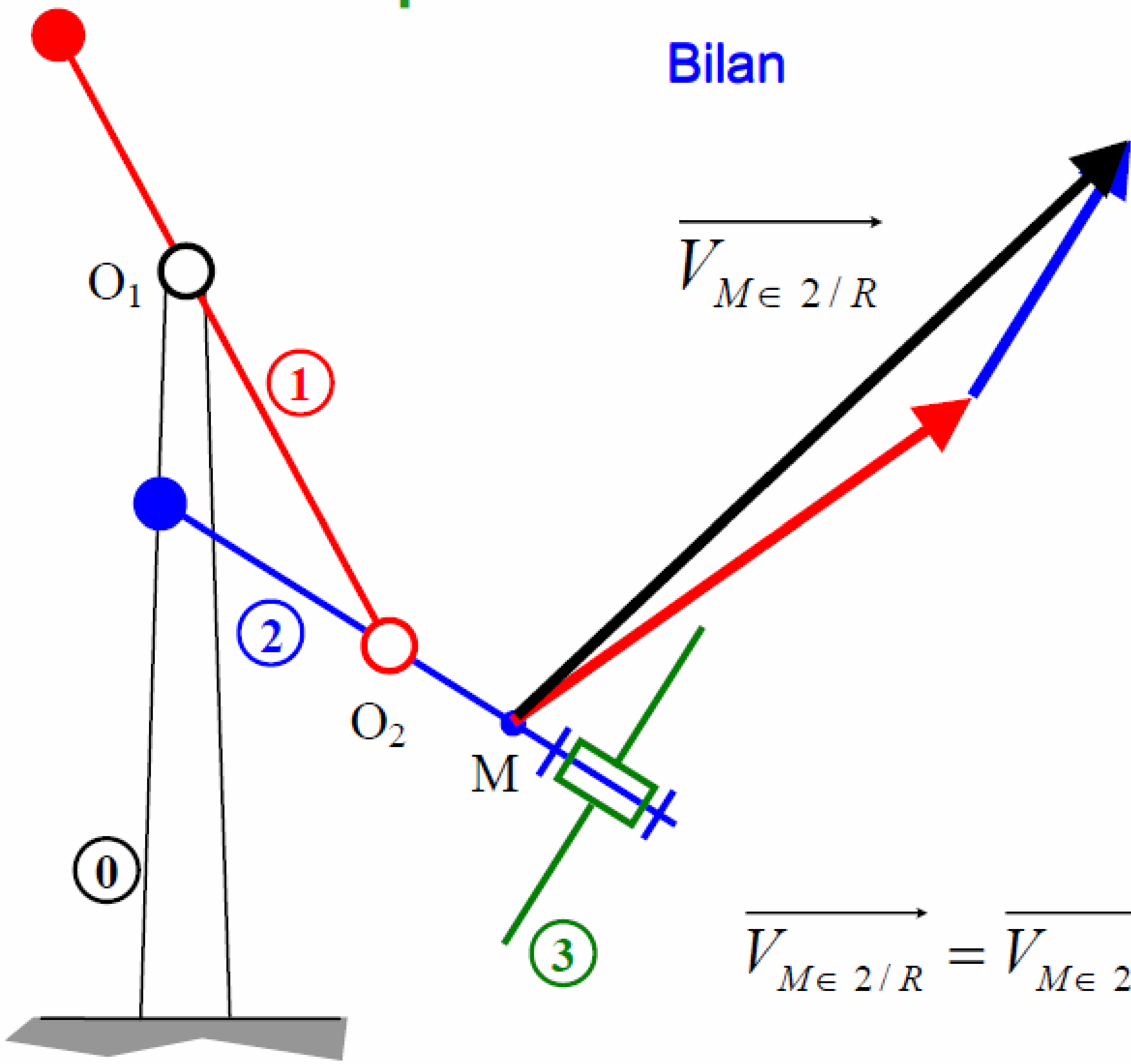
Bilan



$$\overrightarrow{V_{M\in\ 2/R}} = \overrightarrow{V_{M\in\ 2/R_1}} + \overrightarrow{V_{M\in\ R_1/R}} \quad + \quad \ldots$$

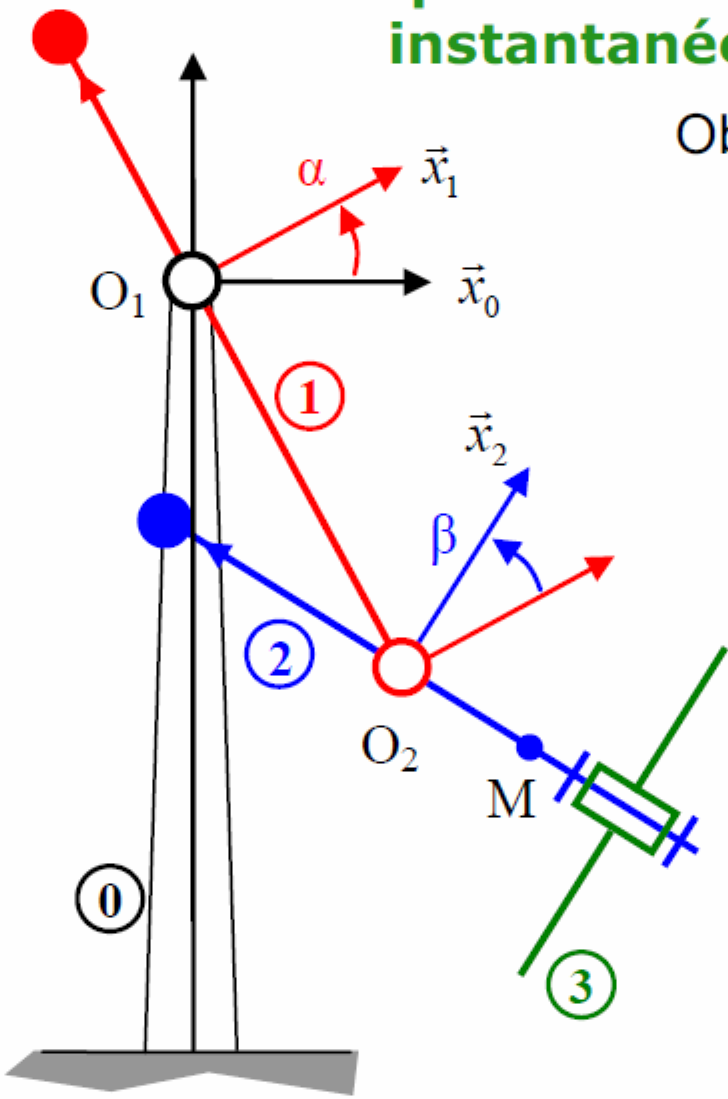
1. Composition des vecteurs vitesse

Bilan



$$\overrightarrow{V_{M\in 2/R}} = \overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}} + \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}$$

Composition des vecteurs vitesse instantanée de rotation



Objectif : $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}$

Mouvements simples

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$$

Comme obtenir l’expression de l’acceleration relative grace à la Formule de Poisson

En généralisant ce qu'on a vu avec la vitesse, si on a un vecteur

$$\mathbf{u} = u'_i \, \mathbf{e}'_i \;\Rightarrow\; \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}'_i \, \mathbf{e}'_i + u'_i \, \dot{\mathbf{e}}'_i = \dot{u}'_i \, \mathbf{e}'_i + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u},$$

comme on a vu pour la vitesse. Alors $\dot{\mathbf{u}}$ est la *dérivée absolue*,

$$\dot{\mathbf{u}}_R = \dot{u}'_i \, \mathbf{e}'_i$$

est la *dérivée relative* et

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_R + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$$

est la *formule de Poisson*. Il est évident que

$$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{r}}'_R \,.$$

Le vecteur

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{p}$$

s'appelle *accélération absolue* du point p ; l'accélération absolue s'obtient donc par double dérivation temporelle de la position du point dans le repère fixe $\mathcal{R}$. Par la première loi de la cinématique on a donc

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v}_o + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')^{\cdot} = \underbrace{\dot{\mathbf{v}}_o}_{\mathbf{a}_o} + \overbrace{\dot{\mathbf{v}}'}^{\mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' \textit{ dérivée relative}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boxed{\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}}'};$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}}' = \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\dot{\mathbf{r}}'_R + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'\right) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'\right)}$$

finalement on a la *deuxième loi de la cinématique* :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \mathbf{a}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \left(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'\right) + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}'}_{\text{Coriolis}}$$