المملكة العربية السعودية

وزارة التربية والتعليم

الإدارة العامة للتربية والتعليم بمنطقة نجران (بنين)

مركز الإشراف التربوي بمحافظة شرورة

**شعبة الرياضيات**

# نادي معلمي الرياضيات الورقي

## الكتاب السنوي الثالث

## ١٤٢٧- ١٤٢٨ هـ

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club papers

# بسم الله الرحمن الرحيم

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper1

# وثيقة إشهار

انه في يوم السبت الموافق ٢١ / ١٠ /١٤٢٥ هـ وفي تمام الساعة الحادية عشرة صباحا تم الإعلان عن تكوين وبدء أعمال :-

## نادي معلمي الرياضيات بمحافظة شروره "الورقي"

والذي يتم تفعيل نشاطه دون اجتماعات دورية أو غير دورية ، وتكون آلية تنفيذه كاملة عن طريق المراسلة كما يتضح من بنود إشهار النادي التالية :-

- يتولى مدير مكتب الإشراف التربوي بمحافظة شروره الإشراف العام على النادي .
- تقتصر العضوية في النادي على معلمي الرياضيات بالمحافظة كأعضاء دائمين مع الاستعداد لتبادل الخبرات مع معلمي المادة من المناطق الأخرى كأعضاء غير دائمين .
- يتم التشاور في المشكلات الخاصة في المادة عن طريق المراسلة بين الأعضاء عن طريق المنسق العام للنادي والذي يتولى مسئوليته مشرف الرياضيات بالمحافظة .
- تقتصر المراسلات علي الأمور الفنية للمادة وخاصة المشكلات الرياضية التي يرى أعضاء النادي أنه بنشرها تعم الفائدة للجميع .
- لا يكلف أي عضو في النادي بأي التزامات مادية سواء دورية أو غير دورية .
- يلتزم المنسق العام للنادي بإرسال جميع المكاتبات التي تصل إلى صندوق النادي بمركز الإشراف التربوي بشروره إلى جميع المشتركين كل حسب الحقل الذي يكون قد حدده للمشكلات الرياضية التي يود الإطلاع عليها سواء كانت مشكلات رياضية خاصة بالمرحلة الابتدائية أو المتوسطة أو الثانوية .
- العضو الذي تصل إليه المشكلات الرياضية غير مطالب بإرسال حلولاً لهذه المشكلات ولكن الغرض هو إثراء حقيبة المعلم العلمية والتشجيع على تكوين ورش عمل بسيطة لمعلمي المادة في كل مدرسة .
- ترسل المشكلات إلي المنسق العام بخط واضح ومرفق بها الحل ويقوم هو بعد ذلك بإرسالها للأعضاء بدون حل .
- يتم طبع ما يسمى بالكتاب السنوي للنادي يحتوي على جميع المشاركات الخاصة بالأعضاء الدائمين والغير دائمين وحلولها النموذجية المعدة من قبل لجنه خاصة يتم تحديدها فيما بعد لإخراج الكتاب السنوي بالصورة اللائقة .
- يتم الاشتراك في النادي عن طريق التوقيع على الاستمارة المعدة لذلك والتي تقر الالتزام بكل البنود السابقة .

| المنسق العام للنادي | سكرتير عام النادي | المشرف العام على النادي |
|---|---|---|
| طارق سلامة صابر | سالم بن مبارك البريكي | محمد بن عوض بن جريبة السبيعي |

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club papers

# الأهداف العامة لنادي معلمي الرياضيات بمحافظة شرورة

١. إثراء الحصيلة العلمية والمعلوماتية لدى معلمي المادة من خلال التمارين والمشكلات الرياضية التي مما لاشك فيه أنها قد تتأثر عندما لا يتم تطويرها وإنماءها .

٢. التواصل بين المعلمين ولو بشكل غير مباشر لإثراء العملية الاجتماعية لأسرة الرياضيات بالمحافظة .

٣. محاولة إعداد حصيلة من المشكلات الرياضية الحقيقية وحلولها لتوسيع دائرة الاختيار لدى المعلمين من هذه المشكلات لإشراك الطلاب في آليات حلها داخل المدارس .

٤. اكتشاف وتنمية الفكر الخلاق لدى بعض الطلاب المهتمين بالمشكلات الرياضية من خلال إشراكهم في حل هذه المشكلات ، خاصة في المراحل الدراسية الأعلى .

٥. محاولة كسر الرتابة و الروتين الذي يفرضه المنهج الدراسي على المعلمين خاصة ذوي الخبرة منهم .

٦. تبادل الخبرات بين معلمي المادة – أعضاء النادي - في تكوين واستشراف حلول متنوعة للمشكلات الرياضية المطروحة .

٧. محاولة تكوين رؤية واضحة لاحتياج المناهج الدراسية المقررة من تطوير للتمارين والخروج بها من إطار التمرين الروتيني العادي إلي مشكلات رياضية متدرجة قادرة على غرس وتنمية أسلوب حل المشكلات في التدريس وجعله وخطواته المنطقية نمطاً للتفكير الحياتي لدي الطلاب .

٨. نقل شعور أن المعلم نفسه يملك الرغبة الأكيدة لتطوير معلوماته ومعرفته لأفكار جديدة لحل المشكلات الرياضية من خلال المناقشة بينه وبين زملائه في النادي إلي الطلاب مما قد يفيدهم في أن الجد والاجتهاد هو الطريق الوحيد للتميز .

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**١** عدد أكبر من مربع العدد ٤٤ ، وأصغر من مربع العدد ٤٥، وهو من مضاعفات العدد ١٣ ، ومربع العدد (٥) هو أحد عوامله ، ما هو هذا العدد؟

[ المصدر : اختبار التصفية الأولى لمسابقة المعلمين – البحرين ٢٠٠٥/١/١٢م]

نفرض أن العدد = س

$\therefore (٤٤)^{٢} < س < (٤٥)^{٢}$

$\therefore ١٩٣٦ < س < ٢٠٢٥$

ولكن ١٣، ٢٥ من عوامل س

$\therefore ١٣ \times ٢٥ = ٣٢٥$ من عوامل س أيضاً ( المضاعف المشترك)

نبحث عن عدد من مضاعفات العدد ٣٢٥ بين ١٩٣٦ ، ٢٠٢٥

بالتجريب نجد أن : $٣٢٥ \times ٦ = ١٩٥٠$

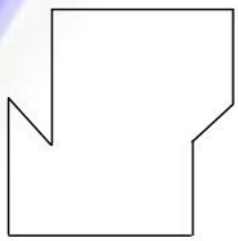
$\therefore س = ١٩٥٠$

لأن $١٩٣٦ < ١٩٥٠ < ٢٠٢٥$

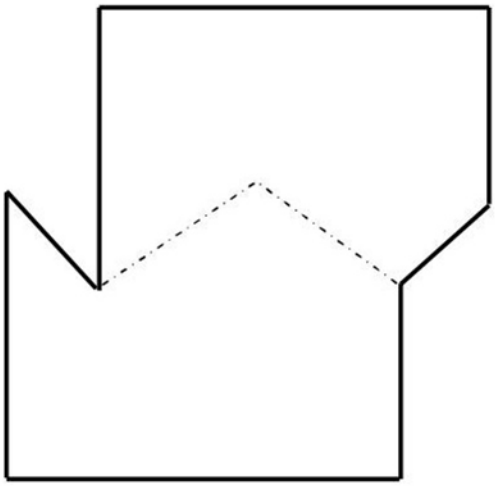
نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٢**

كيف يمكنك أن تقسم الشكل التالي
إلى قسمين متشابهين ومتساويين؟



[ المصدر : اختبار التصفية الأولى لمسابقة اولمبياد الرياضيات السادسة للمدارس الابتدائية – البحرين ٢٢/١٢/٢٠٠٤م]



نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paper

**٣**

**إذا كان كل من ك ، م عددان أوليان ، كان ك م = ٢٠٤٧ ، (ك − ١)( م −١) = ١٩٣٦ فأوجد كل من ك ، م**

**[ المصدر : المسابقة الرابعة - المركز الوطني للعلوم الرياضية – المملكة العربية السعودية]**

∵ (ك− ١)( م −١) = ١٩٣٦

∴ ك م − ك − م +١= ١٩٣٦

∵ ك م = ٢٠٤٧ ----------(١)

∴ ٢٠٤٧ − ك − م +١= ١٩٣٦

∴ − ك − م = ١٩٣٦ − ٢٠٤٧ − ١

∴ − ك − م = ١٩٣٦ − ٢٠٤٧ − ١

∴ − ك − م = −١١٢

∴ ك + م = ١١٢

∴ ك = ١١٢− م ----------(٢)

بالتعويض من (٢) في (١)

∴ م ( ١١٢ − م ) = ٢٠٤٧

∴ ١١٢م − م$^{٢}$ = ٢٠٤٧

∴ م$^{٢}$+ ١١٢م − ٢٠٤٧= صفر

∴ ( م −٢٣) ( م _ ٨٩) = صفر

∴ م = ٢٣ أو ٨٩ ، ومنها ك = ٨٩ أو ٢٣ وهما عددان أوليان.

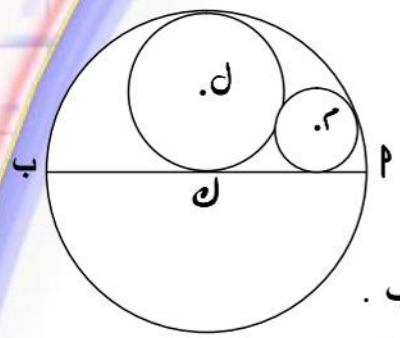
**٤**

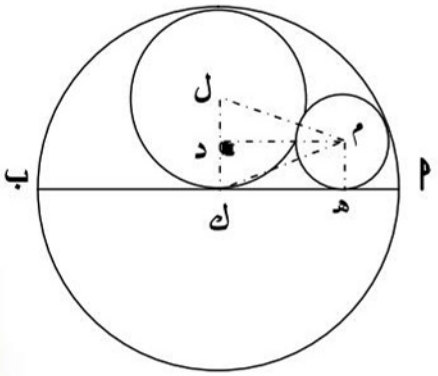
على الشكل :

أب قطر في الدائرة ك ، والدائرة ل تمس الدائرة ك ، وتمس أب في مركز الدائرة ك ، والدائرة م تمس الدائرة ك والدائرة ل والمستقيم أب .

أحسب النسبة بين مساحة الدائرة ك ومساحة الدائرة م

[ المصدر : الاولمبياد الأمريكية الوطنية رقم ٢٧ – مارس ١٩٧٦م]






- نفرض أن الدائرة م تمس أ ب في النقطة هـ.
- نصل م هـ ، ل ك ، م ل ، م ك.
- نرسم م د ⊥ ل ك .
- نفرض أن طول نصف قطر الدائرة م = س
- نفرض أن طول نصف قطر الدائرة ل = ص

∴ طول نصف قطر الدائرة ك = ٢ ص

∵ الدائرتان م ، ل متماستان من الخارج ∴ م ل = س + ص

∵ الدائرتان م ، ك متماستان من الداخل ∴ م ك = ٢ ص – س

∵ د ك = م هـ = س ∴ ل د = ص – س

في △ م ك ل ∵ م د ⊥ ل ك .

∴ | م د |$^2$ = | م ل |$^2$ – | ل د |$^2$ = | م ك |$^2$ – | ك د |$^2$

∴ | م ل |$^2$ – | م ك |$^2$ = | ل د |$^2$ – | ك د |$^2$

∴ ( س + ص )$^2$ – ( ٢ ص – س )$^2$ = ( ص – س )$^2$ – س$^2$

∴ س$^2$ + ٢ س ص + ص$^2$ – ٤ ص$^2$ + ٤ س ص – س$^2$ = ص$^2$ – ٢ س ص + س$^2$ – س$^2$

∴ ٢ س ص – ٤ ص$^2$ + ٤ س ص = – ٢ س ص

∴ ٨ س ص = ٤ ص$^2$ ∴ س = $\frac{1}{2}$ ص

النسبة بين مساحتي الدائرتين ك، م = ط ( ٢ ص )$^2$ : ط ( $\frac{1}{2}$ ص )$^2$ = ١٦ : ١

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

٥

أوجد ناتج:

$$\left(\frac{\sqrt{٥}+١}{٢}\right)^{٢٠٠٠} \times \left(\frac{\sqrt{٥}-١}{٢}\right)^{٢٠٠٠}$$

[ المصدر : الاولمبياد المصرية الوطنية -٢٠٠٣م]

$$\left(\frac{\sqrt{٥}+١}{٢}\right)^{٢٠٠٠} \times \left(\frac{\sqrt{٥}-١}{٢}\right)^{٢٠٠٠} = \left(\frac{(\sqrt{٥}+١)\times(\sqrt{٥}-١)}{٤}\right)^{٢٠٠٠}$$

$$= \left(\frac{٥-١}{٤}\right)^{٢٠٠٠}$$

$$= \left(\frac{٤}{٤}\right)^{٢٠٠٠} = ١$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

**٦**

أثبت أن الحد **الأوسط في مفكوك** : $(١ + س)^{٢ن}$

**يساوي** $\frac{١ \times ٣ \times ٥ \times \ldots\ldots \times (٢ن - ١)}{\lfloor ن} \times ٢^{ن} \; س^{ن}$

**[ المصدر : اختبار الثانوية العامة – المملكة الأردنية –١٩٦٥م]**

**رتبة الحد الأوسط** = $\frac{٢ن - ٢}{٢} = ن - ١$

$\therefore \; ح_{ن+١} = {}^{٢ن}ق_{ن} \; س^{ن} = \frac{\lfloor ٢ن}{\lfloor ن \; \lfloor ن} \; س^{ن}$

$= \frac{٢ن \, (٢ن - ١) \, (٢ن - ٢) \ldots\ldots\ldots \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times س^{ن}}{\lfloor ن \; \lfloor ن}$

$= \frac{(٢ن - ١) \ldots\ldots\ldots\ldots ٣ \times ١}{\lfloor ن} \times \frac{ن \, (ن - ١) \ldots\ldots\ldots\ldots \times ٢ \times ١}{\lfloor ن} \times ٢^{ن} \times س^{ن}$

$= \frac{١ \times ٣ \times ٥ \times \ldots\ldots \times (٢ن - ١)}{\lfloor ن} \times ٢^{ن} \; س^{ن}$

٧

أوجد مجموعة حل المعادلة : $س^{٤} + (٢ - س)^{٤} = ٣٤$ في ح

[ المصدر : مسابقة معهد هارفارد الأمريكي – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤م]

نفرض أن : $ص = ٢ - س$ ومنها $س + ص = ٢$

بالتعويض في المعادلة : $س^{٤} + (٢ - س)^{٤} = ٣٤$

$\therefore س^{٤} + ص^{٤} = ٣٤$

$\because (س + ص)^{٤} = س^{٤} + ٤ س^{٣} ص + ٦ س^{٢} ص^{٢} + ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}$

$= س^{٤} + ص^{٤} + ٢ س ص (٢س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٣ س ص)$ --------- (١)

$\because س + ص = ٢ ، س^{٤} + ص^{٤} = ٣٤$

$\therefore$ بالتعويض في (١) $٢^{٤} = ٣٤ + ٢ س ص (٢س^{٢} + ٢ ص^{٢} + ٣ س ص)$

$٢^{٤} = ٣٤ + ٢ س ص [٢(س^{٢} + ص^{٢}) + ٣ س ص]$

$٢^{٤} = ٣٤ + ٢ س ص [٢(س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص - ٢ س ص) + ٣ س ص]$

$٢^{٤} = ٣٤ + ٢ س ص [٢(س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص) - ٤ س ص + ٣ س ص]$

$٢^{٤} = ٣٤ + ٢ س ص [٢(س + ص)^{٢} - س ص]$

$٢^{٤} = ٣٤ + ٢ س ص [٢(٢)^{٢} - س ص]$

$٢^{٤} = ٣٤ + ٢ س ص [٨ - س ص]$

$١٦ = ٣٤ + ١٦ س ص - ٢ س^{٢} ص^{٢}$

$\therefore ٢ س^{٢} ص^{٢} - ١٦ س ص - ١٨ = صفر$ ( بالقسمة على ٢)

$\therefore (س ص)^{٢} - ٨ س ص - ٩ = صفر$

$\therefore [(س ص) - ٩][(س ص) + ١] = صفر$

$\therefore س ص = ٩$ أو $س ص = -١$

بحل المعادلتين : $س ص = ٩$ ، $س + ص = ٢$ كالتالي:-

بضرب : $س + ص = ٢$ × ص

$\therefore س ص + ص^{٢} = ٢ ص$

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paper

∴ ٩ + ص$^{٢}$ = ٢ ص

∴ ص$^{٢}$ − ٢ ص +٩ = صفر

( مميز المعادلة السابقة : ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٤ − ٤ × ١ × ٩ = − ٣٢ < صفر )

∴ المعادلة : ص$^{٢}$ − ٢ ص +٩ = صفر ليس لها حلول حقيقية.

بحل المعادلتين : س ص = − ١ ، س + ص = ٢ كالتالي:−

بضرب : س + ص = ٢ × ص

∴ س ص + ص$^{٢}$ = ٢ ص

∴ −١ + ص$^{٢}$ = ٢ ص

∴ ص$^{٢}$ − ٢ ص − ١= صفر

( مميز المعادلة السابقة : ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٤ − ٤ × ١ × − ١= ٨ > صفر )

وباستخدام القانون العام لحل المعادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد

$$\therefore \text{ص} = \frac{٢ \pm \sqrt{٨}}{٢} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٢}$$

بالتعويض عن قيم ص في المعادلة : س + ص = ٢

∴ س = ٢ −(١ ± $\sqrt{٢}$ )

∴ س = ١ ± $\sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحل = { ١ ± $\sqrt{٢}$ }

٨

على الشكل :

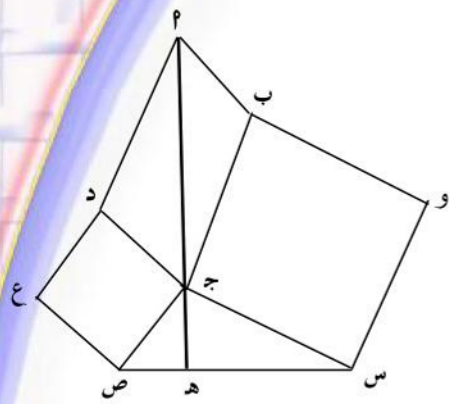
أ ب جـ د متوازي أضلاع ، أنشأ على ضلعيه ب جـ ، جـ د المربعان ب جـ س و ، د جـ ص ع.

رسم $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ فقطع س ص في هـ.

أثبت أن :

| أ جـ | = | س ص| ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{س ص}}$

[ المصدر : مسابقة ولاية وسكنسون الأمريكية- يناير ٢٠٠٠م]



∵ الشكل : أ ب جـ د متوازي أضلاع والشكل: ب جـ س و مربع

∴ | أ د| = | س جـ| ----------(١)

∵ الشكل: جـ د ع ص مربع

∴| د جـ| = | جـ ص| ----------(٢)

∵ ∠ س جـ ص + ∠ ب جـ س + ∠ ب جـ د + ∠ د جـ ص = ٣٦٠°

، ∠ س جـ ص + ٩٠° + ∠ ب جـ د + ٩٠° = ٣٦٠°

∴ ∠ س جـ ص +∠ ب جـ د = ١٨٠°

∵ ∠ أ د جـ + ∠ ب جـ د = ١٨٠° ( خواص متوازي الأضلاع)

∴∠ س جـ ص =∠ أ د جـ ----------(٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) يتطابق △ أ د جـ ، س جـ ص

∴ | أ جـ | = | س ص| ( المطلوب أولاً)

∵∠ أ جـ د + ∠ د جـ ص + ∠ ص جـ هـ =١٨٠°

،∠ أ جـ د+٩٠°+ ∠ ص جـ هـ=١٨٠°

∴ ∠ أ جـ د+∠ ص جـ هـ=٩٠°

∵ ∠ أ جـ د = جـ ص هـ ( من خواص التطابق)

∴ ∠ ص جـ هـ + ∠ جـ ص هـ =٩٠°

∴ ∠ جـ هـ ص = ٩٠° ∴ $\overleftarrow{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{س ص}}$ ( المطلوب ثانياً)

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٩**

**أوجد مجموعة حل المعادلة :**

$$٤\left(١٦^{\text{جا}^{٢}\text{س}}\right) = ٢^{٦\text{جا س}} \qquad ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٢\text{ط}$$

**[ المصدر : المسابقة الكندية المفتوحة– ٢٩ نوفمبر ٢٠٠٠م]**

$$٢^{٢}\left(٢^{٤\text{جا}^{٢}\text{س}}\right) = ٢^{٦\text{جا س}}$$

$$٢^{٤\text{جا}^{٢}\text{س} + ٢} = ٢^{٦\text{جا س}}$$

$$٤\ \text{جا}^{٢}\ \text{س} + ٢ = ٦\ \text{جا س}$$

$$٤\ \text{جا}^{٢}\ \text{س} - ٦\ \text{جا س} + ٢ = \text{صفر} \qquad \text{( بالقسمة على ٢)}$$

$$٢\text{جا}^{٢}\ \text{س} - ٣\text{جا س} + ١ = \text{صفر}$$

$$(٢\text{جا س} - ١)(\text{جا س} - ١) = \text{صفر}$$

$$\therefore\ ٢\text{جا س} = ١ \quad \text{ومنها : جا س} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{، جا س} = ١$$

$$\therefore\ \text{س} = \left\{ \frac{\text{ط}}{٦} ، \frac{٥\text{ط}}{٦} ، \frac{\text{ط}}{٢} \right\}.$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

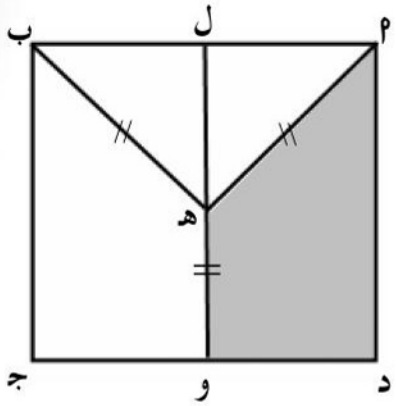
**١٠**

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١ سم ، و نقطة تقع على $\overline{\text{جـ د}}$ ،

هـ نقطة تقع داخل المربع بحيث $\overline{\text{و هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$ ، |أ هـ| = |ب هـ| = |و هـ| .

أوجد مساحة الشكل الرباعي أ د و هـ

[ المصدر : بطولة مدارس ستانفورد الأمريكية- مسابقة الهندسة – ٢٥ فبراير ٢٠٠٦م]




نفرض أن : |أ هـ| = |ب هـ| = |و هـ| = س

، $\overleftarrow{\text{و هـ}}$ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = { ل }

∴ هـ و ⊥ د جـ ، ل ∈ $\overleftarrow{\text{و هـ}}$

∴ |و ل| = |ب جـ| = ١ سم

∵ |أ هـ| = |هـ ب| ، هـ ل ⊥ أ ب

∴ ل منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

في △ هـ ب ل :

|ل ب| = $\frac{١}{٢}$ ، |ل هـ| = ١ − س ، |هـ ب| = س ، $|\text{هـ ب}|^{٢} = |\text{ل ب}|^{٢} + |\text{ل هـ}|^{٢}$

∴ $\text{س}^{٢} = (\frac{١}{٢})^{٢} + (١ - \text{س})^{٢}$

∴ $\text{س}^{٢} = \frac{١}{٤} + ١ - ٢\text{س} + \text{س}^{٢}$

∴ $٢\text{س} = ١\frac{١}{٤}$

∴ $\text{س} = \frac{٥}{٨}$

∴ $|\text{ل هـ}| = ١ - \frac{٥}{٨} = \frac{٣}{٨}$

∴ مساحة الشكل الرباعي : هـ و جـ ب = مساحة المستطيل: ل و جـ ب – مساحة المثلث: ل هـ ب

∴ مساحة الشكل الرباعي : هـ و جـ ب = $(\frac{١}{٢} \times ١) - (\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٨})$

$= \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٣٢}$

$= \frac{١٣}{٣٢}$

∴ مساحة الشكل الرباعي : أ د و هـ = $\frac{١٣}{٣٢}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**١١**

اوجد في أبسط صورة :-

$$\frac{أ^3}{(أ-ب)(أ-جـ)}+\frac{ب^3}{(ب-أ)(ب-جـ)}+\frac{جـ^3}{(جـ-أ)(جـ-ب)}$$

[ المصدر : بطولة مدارس سنانفورد الأمريكية- مسابقة الجبر – ٢٥ فبراير ٢٠٠٦م]

$$=\frac{أ^3(ب-أ)(ب-جـ)(جـ-أ)(جـ-ب)+ب^3(أ-ب)(أ-جـ)(جـ-أ)(جـ-ب)+جـ^3(أ-ب)(أ-جـ)(ب-أ)(ب-جـ)}{(أ-ب)(أ-جـ)(ب-أ)(ب-جـ)(جـ-أ)(جـ-ب)}$$

$$=\frac{أ^3(جـ-ب)\left[(ب-أ)(أ-جـ)(جـ-ب)\right]+ب^3(أ-جـ)\left[(ب-أ)(أ-جـ)(جـ-ب)\right]+جـ^3(ب-أ)\left[(ب-أ)(أ-جـ)(جـ-ب)\right]}{(أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)\left[(ب-أ)(أ-جـ)(جـ-ب)\right]}$$

بالقسمة على : $\left[(ب-أ)(أ-جـ)(جـ-ب)\right]$

$$=\frac{أ^3(جـ-ب)+ب^3(أ-جـ)+جـ^3(ب-أ)}{(أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)}$$

$$=\frac{أ^3(جـ-ب)+أب^3-جـب^3+ب جـ^3-أ جـ^3}{(أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)}$$

$$=\frac{أ^3(جـ-ب)+أ(ب^3-جـ^3)+ب جـ^3-جـ ب^3}{(أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)}$$

$$=\frac{أ^3(جـ-ب)+أ\left[(ب-جـ)(ب^2+ب جـ+جـ^2)\right]+ب جـ(جـ^2-ب^2)}{(أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)}$$

$$=\frac{أ^3(جـ-ب)-أ\left[(جـ-ب)(ب^2+ب جـ+جـ^2)\right]+ب جـ(جـ-ب)(جـ+ب)}{(أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)}$$

$$=\frac{أ^3(جـ-ب)-أ(جـ-ب)(ب^2+ب جـ+جـ^2)+ب جـ(جـ-ب)(جـ+ب)}{(أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)}$$

$$=\frac{(جـ-ب)\left[أ^3-أ(ب^2+ب جـ+جـ^2)+ب جـ(جـ+ب)\right]}{(أ-ب)(ب-جـ)(جـ-أ)}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

$$= \frac{(\text{ج} - \text{ب})\left[\text{أ}^{٣} - \text{أ}(\text{ب}^{٢} + \text{ب ج} + \text{ج}^{٢}) + \text{ب ج}^{٢} + \text{ب}^{٢}\text{ج}\right]}{(\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{ج})(\text{ج} - \text{أ})}$$

$$= -\frac{(\text{ب} - \text{ج})\left[\text{أ}^{٣} - \text{أ}(\text{ب}^{٢} + \text{ب ج} + \text{ج}^{٢}) + \text{ب ج}^{٢} + \text{ب}^{٢}\text{ج}\right]}{(\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{ج})(\text{ج} - \text{أ})}$$

$$= -\frac{\text{أ}^{٣} - \text{أ}(\text{ب}^{٢} + \text{ب ج} + \text{ج}^{٢}) + \text{ب ج}^{٢} + \text{ب}^{٢}\text{ج}}{(\text{أ} - \text{ب})(\text{ج} - \text{أ})}$$

$$= -\frac{\text{أ}^{٣} - \text{أ ب}^{٢} - \text{أ ب ج} - \text{أ ج}^{٢} + \text{ب ج}^{٢} + \text{ب}^{٢}\text{ج}}{(\text{أ} - \text{ب})(\text{ج} - \text{أ})}$$

$$= -\frac{\text{ب}^{٢}(\text{ج} - \text{أ}) + \text{ب ج}(\text{ج} - \text{أ}) + \text{أ}(\text{أ}^{٢} - \text{ج}^{٢})}{(\text{أ} - \text{ب})(\text{ج} - \text{أ})}$$

$$= -\frac{\text{ب}^{٢}(\text{ج} - \text{أ}) + \text{ب ج}(\text{ج} - \text{أ}) + \text{أ}(\text{أ} - \text{ج})(\text{أ} + \text{ج})}{(\text{أ} - \text{ب})(\text{ج} - \text{أ})}$$

$$= -\frac{\text{ب}^{٢}(\text{ج} - \text{أ}) + \text{ب ج}(\text{ج} - \text{أ}) - \text{أ}(\text{ج} - \text{أ})(\text{أ} + \text{ج})}{(\text{أ} - \text{ب})(\text{ج} - \text{أ})}$$

$$= -\frac{(\text{ج} - \text{أ})\left[\text{ب}^{٢} + \text{ب ج} - \text{أ}(\text{أ} + \text{ج})\right]}{(\text{أ} - \text{ب})(\text{ج} - \text{أ})}$$

$$= -\frac{\text{ب}^{٢} + \text{ب ج} - \text{أ}^{٢} - \text{أ ج}}{(\text{أ} - \text{ب})} = \frac{\text{أ}^{٢} + \text{أ ج} - \text{ب ج} - \text{ب}^{٢}}{(\text{أ} - \text{ب})}$$

$$= \frac{(\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}) + \text{ج}(\text{أ} - \text{ب})}{(\text{أ} - \text{ب})} = \frac{(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب}) + \text{ج}(\text{أ} - \text{ب})}{(\text{أ} - \text{ب})}$$

$$= \frac{(\text{أ} - \text{ب})\left[\text{أ} + \text{ب} + \text{ج}\right]}{(\text{أ} - \text{ب})}$$

$$= \text{أ} + \text{ب} + \text{ج}.$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**١٢**

**إذا كانت س موجب يحقق المعادلة :**

$$س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} = ٤ \quad ، \quad \text{فأوجد قيمة : } س + \frac{١}{س}$$

**[ المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية– ١٣ مارس ٢٠٠٢م]**

$$\because \left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢} = س^{٢} + ٢ + \frac{١}{س^{٢}}$$

$$= \left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right) + ٢$$

$$= ٤ + ٢ = ٦$$

$$\therefore \quad س + \frac{١}{س} = \sqrt{٦}$$

**١٣**

إذا كانت : $\text{أ} > \text{صفر}$ ، $\sqrt{\text{أ}\sqrt{\text{أ}\sqrt{\text{أ}}}} = ١٢٨$

اوجد : $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\text{أ}}}}$

[ المصدر : مسابقة المدارس الثانوية لولاية أوكلاهوما الأمريكية – المستوى الثاني -١٨مارس ٢٠٠٦]

$$\sqrt{\text{أ}\sqrt{\text{أ}\sqrt{\text{أ}}}} = \sqrt{\text{أ}\sqrt{\text{أ}\times\text{أ}^{\frac{١}{٢}}}} = \sqrt{\text{أ}\sqrt{\text{أ}^{\frac{٣}{٢}}}} = \sqrt{\text{أ}\times(\text{أ}^{\frac{٣}{٢}})^{\frac{١}{٢}}}$$

$$= \sqrt{\text{أ}\times\text{أ}^{\frac{٣}{٤}}} = \sqrt{\text{أ}^{\frac{٧}{٤}}} = (\text{أ}^{\frac{٧}{٤}})^{\frac{١}{٢}} = \text{أ}^{\frac{٧}{٨}} = ١٢٨$$

$\therefore \text{أ}^{\frac{٧}{٨}} = ٢^{٧}$

$\therefore \text{أ}^{\frac{١}{٨}} = ٢$ ----------(١)

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\text{أ}}}} = \sqrt{\sqrt{\text{أ}^{\frac{١}{٢}}}} = \sqrt{\text{أ}^{\frac{١}{٤}}} = \text{أ}^{\frac{١}{٨}}$$ ----------(٢)

من (١ ، (٢)

$\therefore \sqrt{\sqrt{\sqrt{\text{أ}}}} = ٢$

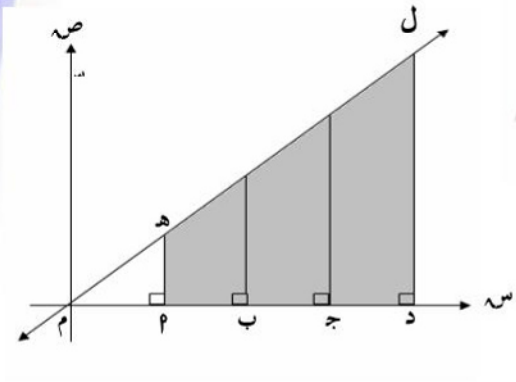
**١٤**

على الشكل :

| م أ | = | أ ب | = | ب جـ | = | جـ د | = ٧ أقدام

ومساحة الجزء المظلل = ١٨ قدم مربع ، أوجد: ميل المستقيم م ل

[ المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية- ٣ مارس ٢٠٠٥م]




من تشابه △ △ أ هـ م ، د ل م

$\therefore \frac{|\text{أ هـ}|}{|\text{ل د}|} = \frac{|\text{أ م}|}{|\text{د م}|}$

$\therefore \frac{|\text{أ هـ}|}{|\text{ل د}|} = \frac{٧}{٢٨} = \frac{١}{٤}$

$\therefore$ | أ هـ | = $\frac{١}{٤}$ | ل د |

$\because$ مساحة سطح شبه المنحرف ل د أ هـ = $\frac{١}{٢}$ ( | أ هـ | + | ل د | ) × | أ د |

= $\frac{١}{٢}$ ( $\frac{١}{٤}$ | ل د | + | ل د | ) × ٢١

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٥}{٤}$ | ل د | × ٢١

$\therefore$ | ل د | = $\frac{٨ \times ١٨}{٥ \times ٢١}$

$\therefore$ ميل | ل م | = ظا (∠ د م ل) = $\frac{٨ \times ١٨}{٢٨ \times ٥ \times ٢١} = \frac{١٢}{٢٤٥}$

**١٥**

أوجد قيمة س التي تحقق المعادلة :-

$$\sqrt{س+١٠} + \sqrt[٤]{س+١٠} = ١٢$$

[ المصدر : مسابقة معهد هارفارد الأمريكي – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤م]

نفرض أن : $\sqrt[٤]{س+١٠} = ص$

$\therefore$ $ص^{٢} + ص - ١٢ = صفر$

$\therefore$ $(ص + ٤)(ص - ٣) = صفر$

$\therefore$ $ص = -٤$ ، $ص = ٣$

$\therefore$ $\sqrt[٤]{س + ١٠} = -٤$ ( مرفوض)

$\therefore$ $\sqrt[٤]{س + ١٠} = ٣$

$\therefore$ $س + ١٠ = ٣^{٤}$

$\therefore$ $س + ١٠ = ٨١$

$\therefore$ $س = ٨١ - ١٠$

$\therefore$ $س = ٧١$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**١٦**

إذا كان : أ ، ب ، جـ جذور المعادلة :

$$س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ٨ = صفر$$

أوجد قيمة : $\frac{١}{أ ب} + \frac{١}{ب جـ} + \frac{١}{أ جـ}$

[ المصدر : مسابقة معهد هارفارد الأمريكي – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤م]

$$\frac{١}{أ ب} + \frac{١}{ب جـ} + \frac{١}{أ جـ} = \frac{أ + ب + جـ}{أ ب جـ} \text{ ----------(١)}$$

∵ أ ، ب ، جـ جذور المعادلة : $س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ٨ = صفر$

∴ $(س - أ)(س - ب)(س - جـ) = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ٨$

∴ $س^{٣} - جـ س^{٢} - ب س^{٢} + ب جـ س - أ س^{٢} + أ جـ س + أ ب س - أ ب جـ = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ٨$

∴ $س^{٣} - (أ + ب + جـ) س^{٢} + (أ ب + ب جـ + أ جـ) س - أ ب جـ = س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ٨$

بمساواة المعاملات

∴ $أ + ب + جـ = ٢$ ، $أ ب جـ = -٨$

بالتعويض في (١)

$$\frac{١}{أ ب} + \frac{١}{ب جـ} + \frac{١}{أ جـ} = \frac{أ + ب + جـ}{أ ب جـ}$$

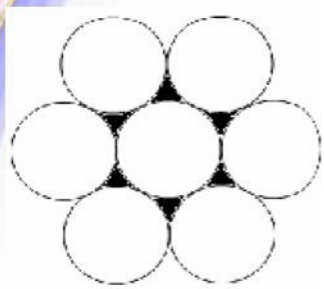
$$= \frac{٢}{-٨} = \frac{-١}{٤}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

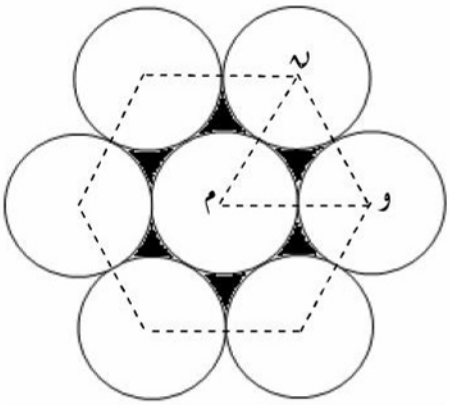
**١٧**

على الشكل :

سبعة دوائر ، الدوائر الخارجية متماسة مثنى مثنى وتمس الدوائر الخارجية الدائرة الداخلية ، إذا كانت جميع الدوائر متطابقة ونصف قطرها ١ سم . أوجد مساحة الجزء المظلل



[ المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية-٤مارس٢٠٠٤هـ]




نصل مراكز الدوائر الست، ونصل رؤوس المثلث وم ن

∴ طول ضلع △ المتطابق الأضلاع : و م ن = ٢ سم

∴ مساحة △ : و م ن = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ × جا ٦٠

= $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= $\sqrt{٣}$ سم$^{٢}$

∴ مساحة السداسي المنتظم = ٦ × $\sqrt{٣}$ = ٦$\sqrt{٣}$ سم$^{٢}$

∵ قياس زاوية رأس السداسي المنتظم = ١٢٠°

∴ مساحة سطح أي دائرة من الدوائر الست ∩ مساحة سطح السداسي = $\frac{١}{٣}$ مساحة سطح هذه الدائرة

∴ $\frac{١}{٣}$ مساحة سطح الدائرة الواحدة = $\frac{١}{٣}$ × ط × ١$^{٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ط سم$^{٢}$

∴ مجموع مساحات أجزاء الدوائر الست داخل السداسي المنتظم = ٦ × $\frac{١}{٣}$ ط = ٢ط سم$^{٢}$

∵ مساحة الدائرة السابعة ( الوسطى) = ط نق$^{٢}$ = ط × ١$^{٢}$ = ط سم$^{٢}$

∵ مساحة الجزء المظلل = مساحة سطح السداسي المنتظم − [ مجموع مساحات أجزاء الدوائر الست داخل السداسي المنتظم + مساحة الدائرة السابعة]

= ٦$\sqrt{٣}$ − [ ٢ط + ط ]

= (٦$\sqrt{٣}$ − ٣ط ) سم$^{٢}$

نادي الرياضيات
Mathematics club papers

**١٨**

أوجد قيم س الحقيقية الموجبة التي تحقق المعادلة:

$$س = \sqrt{س - \frac{١}{س}} + \sqrt{١ - \frac{١}{س}}$$

[ المصدر : مسابقة معهد هارفارد الأمريكي – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤م]

$$س - \sqrt{س - \frac{١}{س}} = \sqrt{١ - \frac{١}{س}}$$

$$س - \sqrt{\frac{س^٢ - ١}{س}} = \sqrt{\frac{س - ١}{س}}$$ ( بالتربيع)

$$س^٢ - ٢ س \times \sqrt{\frac{س^٢ - ١}{س}} + \frac{س^٢ - ١}{س} = \frac{س - ١}{س}$$

$$س^٢ - ٢ \times \sqrt{س^٢ \left[\frac{س^٢ - ١}{س}\right]} + \frac{س^٢ - ١}{س} - \left[\frac{س - ١}{س}\right] = صفر$$

$$س^٢ - ٢ \sqrt{س(س^٢ - ١)} + \frac{س^٢ - س}{س} = صفر$$

$$س^٢ - ٢ \sqrt{س(س^٢ - ١)} + س - ١ = صفر$$

$$(س^٢ - ١) - ٢ \sqrt{س(س^٢ - ١)} + س = صفر$$ ( مقدار مربع كامل)

$$(\sqrt{س^٢ - ١} - \sqrt{س})^٢ = صفر$$

$$\sqrt{س^٢ - ١} - \sqrt{س} = صفر$$

$$\sqrt{س^٢ - ١} = \sqrt{س}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

$$س^{٢} - ١ = س$$

$$س^{٢} - س - ١ = صفر$$

**باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية من الدرجة الثانية**

$$س = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

$$\because س > صفر \ ، \ \sqrt{٥} > ١$$

$$\therefore س = \frac{١ + \sqrt{٥}}{٢}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper1

**١٩**

**بفرض أن أحد المزارعين اشترى ١٠٠ حيوان وطائر بمبلغ ١٠٠ دولار ، حيث كان ثمن البقرة الواحدة ١٠ دولارات ، وثمن الخروف الواحد ٣ دولارات والدجاجة الواحدة ٥٠ سنتاً .كم اشترى المزارع من كل نوع من الأنواع السابقة ( الدولار = ١٠٠ سنت)**

**[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ١٨ فبراير ٢٠٠٤م]**

نفرض أن : عدد البقرات = س ، عدد الخراف = ص ، عدد الدجاج = ع

∴ ع = ١٠٠ – س – ص ----------(١)

(وبالنسبة لثمن الشراء بعد تحول ٥٠ سنتاً إلى ٠,٥٠دولار)

∴ ١٠س + ٣ص + ٠,٥ع = ١٠٠ ( بالضرب ×١٠٠)

∴ ١٠٠٠س + ٣٠٠ص + ٥٠ع = ١٠٠٠٠ ----------(٢)

بالتعويض من (١)في (٢)

∴ ١٠٠٠س + ٣٠٠ص + ٥٠ (١٠٠ – س – ص ) = ١٠٠٠٠

∴١٠٠٠س + ٣٠٠ص +٥٠٠٠ – ٥٠س _ ٥٠ص = ١٠٠٠٠

∴ ٩٥٠ س +٢٥٠ ص = ٥٠٠٠ ( بالقسمة على ٥٠)

∴١٩س + ٥ص = ١٠٠

∴ ٥ ص = ١٠٠ – ١٩ س ( بالقسمة على ٥)

∴ ص = ٢٠ – $\frac{١٩}{٥}$ س

وعند ملاحظة المعادلة الأخيرة نجد أنه يجب أن تكون قيمة س موجبة وتقبل القسمة على ٥

أي أنه يجب أن تكون قيمة س = صفر أو ٥

وفي حالة : س= صفر ∴ص = ٢٠ ، ع = ٨٠

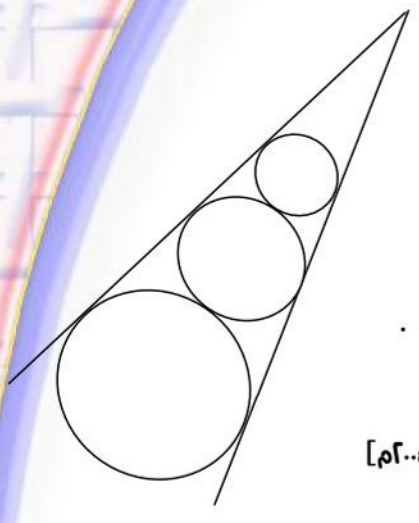
( أي : عدد البقرات = صفر ، عدد الخراف =٢٠ ، عدد الدجاج =٨٠)

وفي حالة : س=٥ ∴ص = ١ ، ع = ٩٤

( أي : عدد البقرات =٥ ، عدد الخراف =١ ، عدد الدجاج =٩٤)

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٢٠**



على الشكل المجاور:

ثلاث دوائر ، الصغرى نصف قطرها ٢ سم

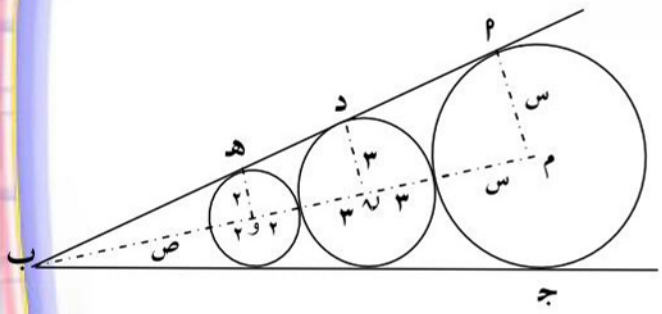
وتمس الدائر ة الوسطي التي نصف قطرها ٣سم ،

والتي تمسالدائرة الكبري التي نصف قطرها نق

، والدوائر الثلاث تمس المستقيمين الموضحين بالرسم .

أوجد طول نق .

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –٢٣ فبراير ٢٠٠٥م]




∵ الدوائر : م ، ن ،و تمس الضلعين

$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ .

∴ النقاط : م ، ن ،و ، ب على استقامة واحدة

∴ نصل $\overline{أب}$ ، $\overline{مأ}$ ، $\overline{ند}$ ، $\overline{وهـ}$

∴ مأ، ند ، وهـ أعمدة على المماس أ ب

من تشابه △ △ بوهـ ، بند

∴ $\frac{|بو|}{|بن|} = \frac{|وهـ|}{|ند|}$

∴ $\frac{ص + ٢}{ص + ٧} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣ص +٦ = ٢ص +١٤

∴ ص = ٨ سم

من تشابه △ △ بوهـ ، بمأ

∴ $\frac{|بو|}{|بم|} = \frac{|وهـ|}{|مأ|}$ ∴ $\frac{١٠}{١٨ - س} = \frac{٢}{س}$

١٠س = ٣٦ +٢س

٨ س = ٣٦

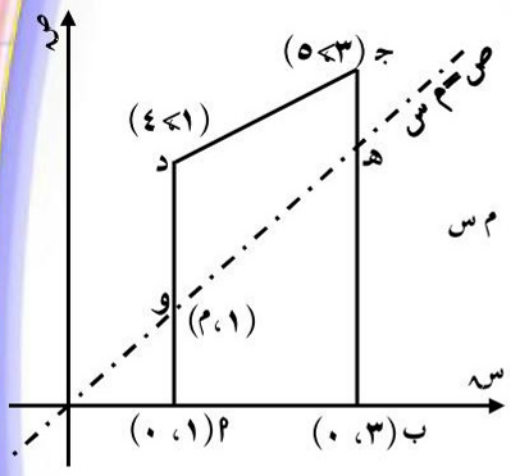
س = ٤,٥سم. ∴ نق= ٤,٥سم

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paperb

**٢١**

**إذا كانت : أ(١، ٠) ، ب( ٣ ، ٠) ، جـ ( ٣، ٥ ) ، د (١، ٤) هي رؤوس شبه منحرف . أوجد معادلة المستقيم الذي يقسمه إلى نصفين متطابقين في المساحة.**

**[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢١ فبراير ٢٠٠١م]**




نفرض أن معادلة المستقيم الذي يقسم شبه المنحرف

ص = م س

∴ للحصول على إحداثي نقطة تقاطع $\overleftarrow{أ د}$ مع المستقيم : ص = م س

∵ الاحداثي السيني للنقطة و = ١

∴ بالتعويض في معادلة المستقيم : ص = م س

∴ ص = ١ × م = م

∴ احداثي نقطة : و = ( ١ ، م )

بالمثل ∴ احداثي نقطة : هـ = (٣ ، ٣م )

∵ مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د = $\frac{١}{٢}$ [ مجموع القاعدتين المتوازيتين ] × الارتفاع

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د = $\frac{١}{٢}$ [ |ب جـ| + |أ د| ] × ٢

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب جـ د = $\frac{١}{٢}$ [ ٤ + ٥ ] × ٢ = ٩ سم$^{٢}$

∵ مساحة نصف شبه المنحرف أ ب جـ د = مساحة شبه المنحرف ب هـ و أ

∴ مساحة نصف شبه المنحرف أ ب جـ د = $\frac{١}{٢}$ [ م + ٣م ] × ٢ = ٤ م سم$^{٢}$

∵ مساحة نصف شبه المنحرف أ ب جـ د = $\frac{٩}{٢}$ سم$^{٢}$

∴ ٤ م = $\frac{٩}{٢}$

∴ م = $\frac{٩}{٨}$

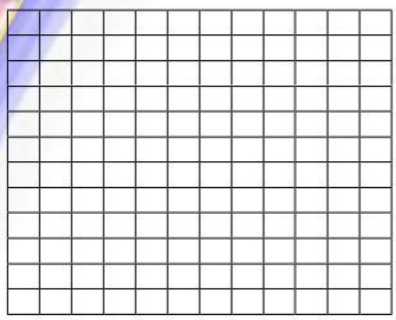
∴ معادلة المستقيم : ص = $\frac{٩}{٨}$ س

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٢٢**

**هل تستطيع تقسيم السجادة التي أبعادها (١٢، ١٢ ) قدم و الموضحة بالشكل المجاور إلى:-**

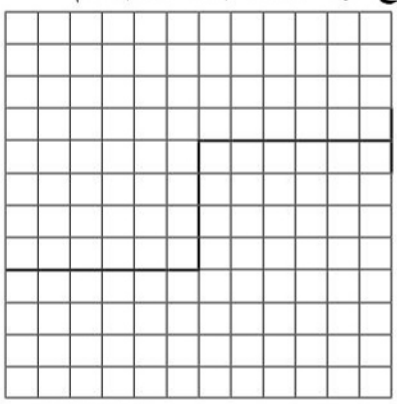
- قسمين لتغطية سطح غرفة أبعادها ( ١٨ ، ٨) قدم.
- قسمين لتغطية سطح غرفة أبعادها (١٦، ٩) قدم.



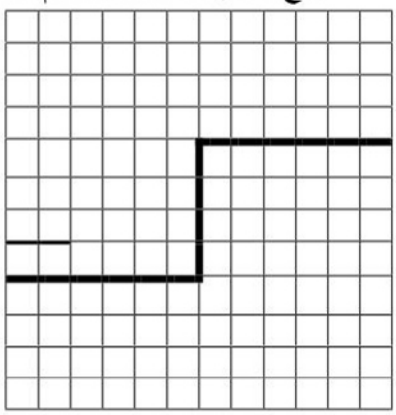
١٢ × ١٢

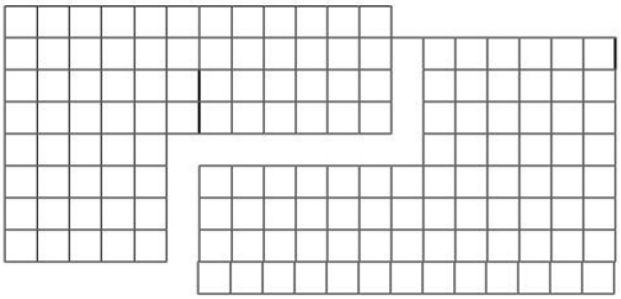
**[ مسابقة – مدارس UNM-PNM بولاية نيو مكسيكو الأمريكية – الدور الأول – ١٣ نوفمبر ٢٠٠٤]**

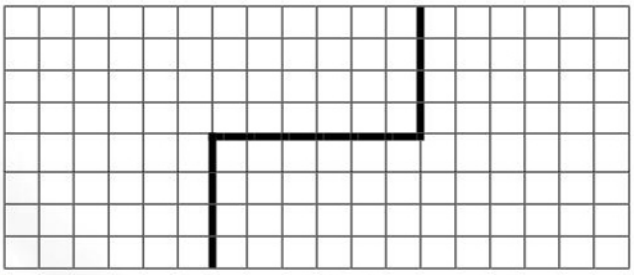
- نتبع الخطوات التالية لتقسيم السجادة قسمين لتغطية سطح غرفة أبعادها ( ١٨ ، ٨) قدم



١٢×١٢

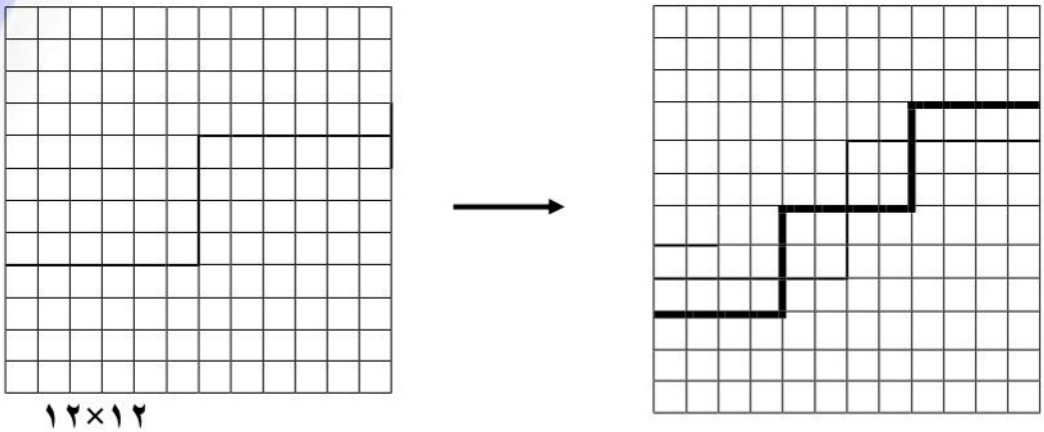




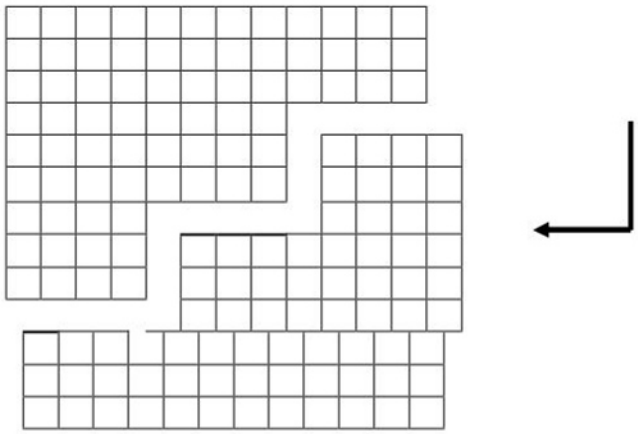


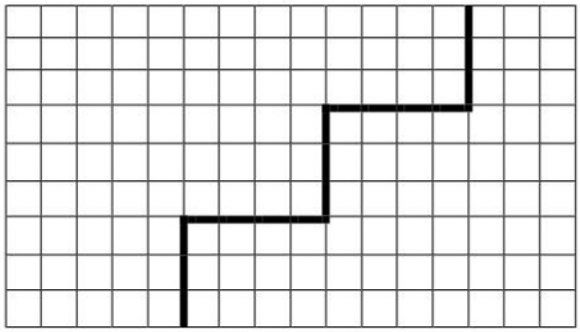
١٨×٨

- نتبع الخطوات التالية لتقسيم السجادة قسمين لتغطية سطح غرفة أبعادها ( ١٦ ، ٩) قدم



١٢×١٢





١٦×٩

**٢٣**

**اذكر باقي قسمة :**

**ق( س) = ١ − س + ٢ س$^{٤}$ − ٣ س$^{٩}$ + ٤ س$^{١٦}$ − ٥ س$^{٢٥}$ + ٦ س$^{٣٦}$ + س$^{٢٠٠٥}$**

**على : هـ (س) = س$^{٢}$ − ١**

**[ مسابقة – مدارس UNM-PNM بولاية نيو مكسيكو الأمريكية – الدور الأول –١٢نوفمبر ٢٠٠٥م]**

∵ ق( س) = ك( س) × هـ ( س) +د ( س)

حيث : ك( س) خارج القسمة ، هـ ( س) المقسوم ، د ( س) الباقي

∵ هـ ( س) كثيرة حدود من الدرجة الثانية.

∴ د ( س) من الدرجة الأولى أو أقل

نفرض أن : د ( س) = أ س + ب

∴ ق( س) = ك( س) × هـ ( س) + أ س + ب

∵ العدد ١ جذر من جذور : هـ ( س) (باستخدام نظرية الباقي)

∴ ق( ١) = ك ( ١) × هـ ( ١) + أ + ب

∵ ق( ١) = ١ − ١ + ٢ − ٣ + ٤ − ٥ + ٦ +١

= ١٣ − ٨ = ٥

∵ هـ ( ١) = صفر

∴ ٥ = ك ( ١) × صفر + أ + ب

∴ أ + ب = ٥ ----------(١)

∵ العدد −١ جذر من جذور : هـ ( س)

∵ ق( −١) = ١+١+٢+٣+٤+٥+٦−١ = ٢١

∵ ق(−١) = ك ( −١) × صفر − أ + ب

∴ − أ + ب = ٢١ ----------(٢)

من (١) ، (٢)

٢ ب = ٢٦ ، ومنها ب = ١٣

∴ أ = −٨

∴ د(س)= −٨س + ١٣

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٢٤**

**اثبت أن :**

**الفرق بين مربعي أي عددين فرديين يقبل القسمة على ٨**

**[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢١ فبراير ٢٠٠١م]**

نفرض أن العددين الفرديين هما : س= ٢ أ+١ ، ص = ٢ ب+١

∴ س$^{٢}$ – ص$^{٢}$ = (٢ أ+١)$^{٢}$ – (٢ ب+١)$^{٢}$

= ٤ أ$^{٢}$ + ٤ أ+ ١ – ( ٤ ب$^{٢}$+ ٤ ب+ ١)

= ٤ أ$^{٢}$ + ٤ أ+ ١ – ٤ ب$^{٢}$ – ٤ ب –١

= ٤ أ$^{٢}$ + ٤ أ – ٤ ب$^{٢}$ – ٤ ب

= ٤ ( أ$^{٢}$ + أ – ب$^{٢}$ – ب )

= ٤ [ أ( أ +١ )– ب( ب –١) ]

∴ س$^{٢}$ – ص$^{٢}$ تقبل القسمة على :٤

∵ حاصل ضرب أي عددين أحدهما زوجي والآخر فردي = عدد زوجي

∴ أ × ( أ +١ ) عدد زوجي ، ب × ( ب –١) عدد زوجي

∴ أ( أ +١ )– ب( ب –١) عدد زوجي

∴ أ( أ +١ )– ب( ب –١) يقبل القسمة على :٢

∴ س$^{٢}$ – ص$^{٢}$ تقبل القسمة على : ٨

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

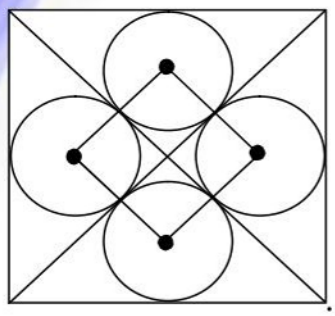
**٢٥**

في الشكل المجاور:

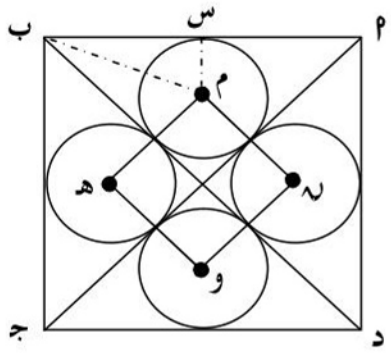
مربع طول ضلعه الوحدة ، رسمت داخله

أربع دوائر متطابقة تمس أضلاعه وأقطاره .

أوجد: مساحة المربع الذي رؤوسه مراكز هذه الدوائر.



[ المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية-٩ مارس ٢٠٠٦م]




نصل : س م ، م ب

نفرض أن نصف قطر أي دائرة = نق

∵ م ب ينصف ∠ م ب د

( حيث س ب ، د ب مماسان للدائرة م من نقطة واحدة)

∴ ∠ س ب م = $\frac{٤٥^\circ}{٢}$ = ٢٢,٥ °

∴ في △ م ب س القائم في ∠ س

∵ ظا ( م ب س) = $\frac{|م س|}{|س ب|}$

∴ ظا ( $\frac{٤٥^\circ}{٢}$ ) = نق ÷ $\frac{١}{٢}$

∴ نق = $\frac{١}{٢}$ ظا ( $\frac{٤٥^\circ}{٢}$ )

∴ ٢ نق = ظا ( $\frac{٤٥^\circ}{٢}$ )

∴ ٢ نق = ٠,٤١٤

∵ طول ضلع المربع م ن و هـ = ٢ نق

∴ مساحة المربع = ٠,٤١٤ × ٠,٤١٤ = ٠,١٧١ وحدة مربعة

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٢٦**

أوجد مجموعة حل المعادلة:

$$\frac{س + ١}{٢ + \sqrt{س}} - \frac{١}{٢ - \sqrt{س}} = ٣$$

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢١ فبراير ٢٠٠١م]

$$\frac{س + ١}{٢ + \sqrt{س}} \quad \frac{١}{٢ - \sqrt{س}} = \frac{(س + ١)(٢ - \sqrt{س}) - (٢ + \sqrt{س})}{٤ - س} = ٣$$

$\therefore (س + ١)(٢ - \sqrt{س}) - (٢ + \sqrt{س}) = ٣(٤ - س)$

$\therefore ٢س - س\sqrt{س} + ٢ - \sqrt{س} - ٢ - \sqrt{س} = ١٢ - ٣س$

$\therefore -س\sqrt{س} - ٢\sqrt{س} = ١٢ - ٥س$

$\therefore س\sqrt{س} - ٥س + ٢\sqrt{س} + ١٢ = صفر$

نفرض أن : $\sqrt{س} = ص$ ومنها $س = ص^٢$

$\therefore ص^٣ - ٥ص^٢ + ٢ص + ١٢ = صفر$

$ص^٣ - ٥ص^٢ + ٢ص + ١٢ + ٢٧ - ٢٧ = صفر$

$(ص^٣ - ٢٧) + (-٥ص^٢ + ٢ص + ٣٩) = صفر$

$(ص^٣ - ٢٧) - (٥ص^٢ - ٢ص - ٣٩) = صفر$

$(ص - ٣)(ص^٢ + ٣ص + ٩) - [(ص - ٣)(٥ص + ١٣)] = صفر$

$(ص - ٣)[ص^٢ + ٣ص + ٩ - ٥ص - ١٣] = صفر$

$(ص - ٣)[ص^٢ - ٢ص - ٤] = صفر$

$\therefore ص - ٣ = صفر$ ومنها: $ص = \sqrt{س} = ٣$

$\therefore س = ٩$

وبحل المعادلة : $ص^٢ - ٢ص - ٤ = صفر$ باستخدام القانون العام

$$ص = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

$\therefore$ ص = ١ $\pm \sqrt{٥}$

$\therefore$ ص = $\sqrt{\text{س}}$ = ١ $\pm \sqrt{٥}$ ( بالتربيع)

$\therefore$ س = ( ١ $\pm \sqrt{٥}$ )$^{٢}$

= ١ $\pm$ ٢$\sqrt{٥}$ + ٥

= ٦ $\pm \sqrt{٥}$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة = { ٩ ، ٦ $-\sqrt{٥}$ ، ٦ $+\sqrt{٥}$ }.

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٢٧**

**إذا كانت : أ، ب، جـ ثلاث أعداد حقيقية غير سالبة .**

**اثبت ان :-**

$$(أ + ب + جـ)^{٣} \geqslant أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣} + ٢٤\ أ ب جـ$$

نبدأ بالمتباينة :-

$$أ(ب - جـ)^{٢} + ب(جـ - أ)^{٢} + جـ(أ - ب)^{٢} \geqslant \text{صفر}$$

∵ أ، ب، جـ ثلاث أعداد حقيقية غير سالبة.

∴ الكميات المربعة موجبة.

$$\therefore أ(ب^{٢} - ٢ ب جـ + جـ^{٢}) + ب(جـ^{٢} - ٢ جـ أ + أ^{٢}) + جـ(أ^{٢} - ٢ أ ب + ب^{٢}) \geqslant \text{صفر}$$

$$\therefore أ ب^{٢} - ٢ أ ب جـ + أ جـ^{٢} + ب جـ^{٢} - ٢ ب جـ أ + ب أ^{٢} + جـ أ^{٢} - ٢ جـ أ ب + جـ ب^{٢} \geqslant \text{صفر}$$

$$\therefore أ ب^{٢} + أ جـ^{٢} + ب جـ^{٢} + ب أ^{٢} + جـ أ^{٢} + جـ ب^{٢} \geqslant ٦ أ ب جـ \text{----------(١)}$$

$$\because (أ + ب + جـ)^{٣} = أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣} + ٣(أ^{٢} ب + أ^{٢} جـ + ب^{٢} أ + ب^{٢} جـ + جـ^{٢} أ + جـ^{٢} ب) + ٦ أ ب جـ \text{---(٢)}$$

بالتعويض من (١) في (٢)

$$\therefore (أ + ب + جـ)^{٣} \geqslant أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣} + ٣(٦ أ ب جـ) + ٦ أ ب جـ$$

$$\therefore (أ + ب + جـ)^{٣} \geqslant أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣} + ١٨ أ ب جـ + ٦ أ ب جـ$$

$$\therefore (أ + ب + جـ)^{٣} \geqslant أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣} + ٢٤ أ ب جـ..$$

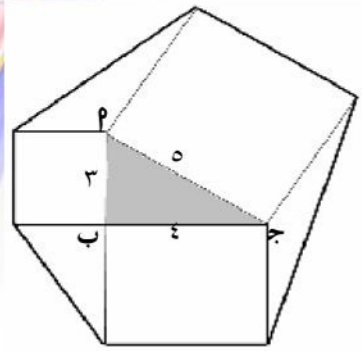
نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٢٨**

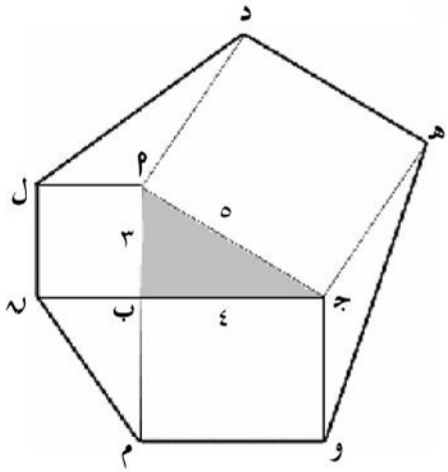
على الشكل :

أ ب جـ أطوال أضلاعه |أ ب| = ٣ سم ، |ب جـ| = ٤ سم ، |أ جـ| = ٥ سم.

أنشأنا على كل ضلع من أضلاعه مربعاً ، أوجد مساحة الشكل الخماسي الغير منتظم




[ المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية-١٣ مارس ٢٠٠٢م]




مساحة سطح المربع : أ ب ن ل = ٣ × ٣ = ٩ سم$^{٢}$

مساحة سطح المربع: م و جـ ب = ٤ × ٤ = ١٦ سم$^{٢}$

مساحة سطح المربع : أ جـ هـ د = ٥ × ٥ = ٢٥ سم$^{٢}$

مساحة سطح : △ م ب ن القائم في ∠ ب

= $\frac{١}{٢}$ (٣×٤) = ٦ سم$^{٢}$

في △ جـ أ ب ∵ جا ∠ جـ أ ب = $\frac{٤}{٥}$

، ∵ ∠ د أ ل تكمل ∠ جـ أ ب

∴ جا ∠ د أ ل = $\frac{٤}{٥}$

بالمثل في △ جـ و هـ ∵ ∠ أ جـ ب تكمل ∠ هـ جـ و

∴ جا ∠ هـ جـ و = $\frac{٣}{٥}$

∴ مساحة سطح △ أ د ل = $\frac{١}{٢}$ (٣×٥ × جا ∠ د أ ل )

= $\frac{١}{٢}$ (٣×٥ × $\frac{٤}{٥}$ ) = ٦ سم$^{٢}$

، مساحة سطح △ هـ جـ و = $\frac{١}{٢}$ (٣×٥ × جا ∠ هـ جـ و)

= $\frac{١}{٢}$ (٤×٥ × $\frac{٣}{٥}$ ) = ٦ سم$^{٢}$

∴ مساحة سطح السداسي الغير منتظم : هـ و م ن ل د

= ٩+١٦ + ٢٥ + ٦ + ٦ + ٦ + ٦ = ٧٤ سم$^{٢}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٢٩**

إذا كانت :

هـ زاوية تقع في الربع الأول ، كان : ٣ جتا هـ − ٤ جا هـ = ٢

أوجد : ٣ جا هـ + ٤ جتا هـ

[ مسابقة – مدارس UNM-PNM بولاية نيو مكسيكو الأمريكية – الدور الأول – ١٣ نوفمبر ٢٠٠٤ م ]

∵ ( ٣جتا هـ − ٤جا هـ)$^{٢}$ + ( ٣جا هـ − ٤ جتا هـ)$^{٢}$ = ٩جتا$^{٢}$هـ − ٢٤ جتا هـ جا هـ + ١٦جا$^{٢}$ هـ

+٩جا$^{٢}$ هـ +٢٤ جتا هـ جا هـ +١٦جتا$^{٢}$ هـ

= ٩جتا$^{٢}$هـ + ١٦جا$^{٢}$ هـ +٩جا$^{٢}$ هـ +١٦جتا$^{٢}$ هـ

= ٩( جتا$^{٢}$هـ + جا$^{٢}$هـ) + ١٦ ( جتا$^{٢}$هـ+ جا$^{٢}$هـ)

=٩+ ١٦ =٢٥

∴ ( ٣جتا هـ − ٤جا هـ)$^{٢}$ + ( ٣جا هـ − ٤ جتا هـ)$^{٢}$ = ٢٥

∵ ٣جتا هـ − ٤ جا هـ = ٢

∴(٢ )$^{٢}$ + ( ٣جا هـ − ٤ جتا هـ)$^{٢}$ = ٢٥

∴ ٤ + ( ٣جا هـ − ٤ جتا هـ)$^{٢}$ = ٢٥

∴ ( ٣جا هـ − ٤ جتا هـ)$^{٢}$ = ٢٥ − ٤

∴ ( ٣جا هـ − ٤ جتا هـ)$^{٢}$ = ٢١

∴ ٣جا هـ − ٤ جتا هـ = $\sqrt{٢١}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٣٠**

إذا كانت :

أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ع $\in$ ص$^+$ ، وكان : $\frac{أ}{د} = \frac{ب}{هـ} = \frac{جـ}{و}$

فاثبت أن : $\sqrt{أ د} + \sqrt{ب جـ} + \sqrt{أ د} = \sqrt{(أ + ب + جـ)(د + هـ + ع)}$

[ مسابقة –معهد ECC الأمريكي–٣ ابريل ٢٠٠٤م]

نفرض أن : $س = \frac{أ}{د} = \frac{ب}{هـ} = \frac{جـ}{و}$

$\therefore$ أ = س د ، ب = س هـ ، جـ = س و

$\therefore \sqrt{أ د} + \sqrt{ب جـ} + \sqrt{أ د} = \sqrt{س د^2} + \sqrt{س هـ^2} + \sqrt{س و^2}$

$= د\sqrt{س} + هـ\sqrt{س} + و\sqrt{س}$

$= (د + هـ + و)\sqrt{س}$ ----------(١)

، $\therefore \sqrt{(أ + ب + جـ)(د + هـ + و)} = \sqrt{(س د + س هـ + س و)(د + هـ + و)}$

$= \sqrt{س (د + هـ + و)(د + هـ + و)}$

$= \sqrt{س (د + هـ + و)^2}$

$= (د + هـ + و)\sqrt{س}$ ----------(٢)

من (١)، (٢) ينتج المطلوب

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٣١**

على الشكل :

(م ، نق)،(ن ، نق) دائرتان متطابقتان

مرسومتان داخل المثلث أ ب جـ القائم في زاوية ب ،

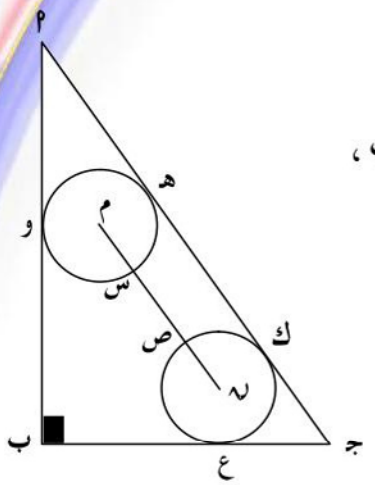
وتمسان أضلاع المثلث في النقاط : هـ و ك ع

رسم م ن فقطع الدائرتين في س ، ص

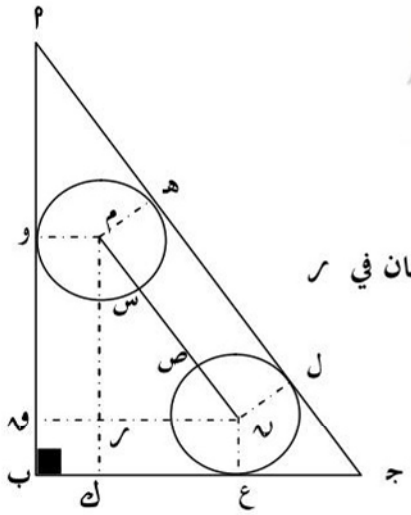
بحيث: | م س|=| س ص|=| ص ن|

فإذا كان : | أ ب|= ٦سم ، | ب جـ|=٨سم

فاوجد : طول نق




[ المصدر : مسابقة المدارس الثانوية بولاية أوهايو الأمريكية-٢٠٠٥م]




- نصل : م هـ ، م و ، ن ل ، ن ع
- نسقط : ن نق ⊥ أ ب ، م ك ⊥ جـ ب يتقاطعان في ر

∵ | ن ل| = | م هـ| = نق

، ∵ ن ل ⊥ أ جـ ، م هـ ⊥ أ جـ

∴ الشكل : ن ل هـ م مستطيل

، ∵ | م س|=| س ص|=| ص ن|

∴ | هـ ل| = ٣ نق

∵ جا أ = $\frac{٦}{١٠}=\frac{٣}{٥}$ ، جا ∠ ن م ر = $\frac{م ر}{٣ نق}$

من تشابه △ △ : أ جـ ب ، م ن ر

∴ جا أ = جا ∠ ن م ر

∴ $\frac{م ر}{٣ نق} = \frac{٣}{٥}$

∴ م ر = $\frac{٩}{٥}$ نق

وبالمثل : ن ر = $\frac{١٢}{٥}$ نق

∵ | م ر| = |و نق| ، نق ب = نق

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

∴ |أو| = ٦ − نق − $\frac{٩}{٥}$ نق

= ٦ − $\frac{١٤}{٥}$ نق

، ∵ |ن ر| = |ع ك| ، ك ب = نق

∴ |ج ع| = ٨ − نق − $\frac{١٢}{٥}$ نق

= ٨ − $\frac{١٧}{٥}$ نق

∵ |أو| = |أ هـ| ، |ج ل| = |ج ع|

، |أ ج| = ٦ − $\frac{١٤}{٥}$ نق + ٣ نق + ٨ − $\frac{١٧}{٥}$ نق = ١٠

∴ ١٤ − $\frac{٣١}{٥}$ نق + ٣ نق = ١٠

∴ ١٤ + $\frac{-٣١+١٥}{٥}$ نق = ١٠

∴ ١٤ − $\frac{١٦}{٥}$ نق = ١٠

∴ $\frac{١٦}{٥}$ نق = ٤

∴ نق = $\frac{٤\times٥}{١٦}$ = $\frac{٥}{٤}$

**٣٢**

حل المعادلة :-

$$\frac{٥\,س}{س + ٣} + \frac{س + ٢}{س} - \frac{٦}{س^{٢} + ٣\,س} = ٥$$

حيث س $\notin \{ -٣ ، ٠ \}$

[ المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية-٤مارس ٢٠٠٤]

$$\frac{٥}{س + ٣} + \frac{س + ٢}{س} - \frac{٦}{س\,(س + ٣)} = \frac{٥\,س^{٢} + (س + ٢)(س + ٣) - ٦}{س\,(س + ٣)} = ٥$$

$$٥\,س^{٢} + (س + ٢)(س + ٣) - ٦ = ٥\,س\,(س + ٣)$$

$$٥\,س^{٢} + س^{٢} + ٥س + ٦ - ٦ = ٥\,س^{٢} + ١٥\,س$$

$$٦\,س^{٢} + ٥س = ٥\,س^{٢} + ١٥\,س$$

$$س^{٢} - ١٠\,س = صفر$$

$$س\,(س - ١٠) = صفر$$

إما س= صفر ( مرفوض)

$\therefore$ س = ١٠.

**٣٣**

**أوجد جميع حلول ( س ، ص ، ع) الصحيحة الموجبة التي تحقق النظام**

$$\begin{cases} س^{٢} + ص - ع = ١٠٠ \\ س + ص^{٢} - ع = ١٢٤ \end{cases}$$

**[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية -٢٢ فبراير ٢٠٠٦ م]**

نفرض أن : $س^{٢} + ص - ع = ١٠٠$ ---------- (١)

$س + ص^{٢} - ع = ١٢٤$ ---------- (٢)

بالطرح $\therefore$ $س + ص^{٢} - س^{٢} - ص = ٢٤$

$\therefore$ $(ص^{٢} - س^{٢}) - ص + س = ٢٤$

$\therefore$ $(ص - س)(ص + س) - (ص - س) = ٢٤$

$\therefore$ $(ص - س)\left[(ص + س) - ١\right] = ٢٤$

$\therefore$ $(ص - س)(ص + س - ١) = ٢٤$

نلاحظ أن :

(ص – س) (ص + س) إما عددان زوجيان معا أو عددان فرديان معا وبالتالي العددان (ص – س) (ص + س– ١) عددان أحدهما فردي والآخر زوجي .

وكذلك نلاحظ أن :

$(ص + س - ١) > (ص - س)$

وبالتالي :

التحليل الممكن للعدد ٢٤ هو ( ٣ ، ٨ ) أو (١ ، ٢٤ )

وعلى ذلك :-

$\begin{cases} ص - س = ٣ \\ ص + س - ١ = ٨ \end{cases}$ ومنها $\begin{cases} س = ٣ \\ ص = ٦ \end{cases}$ ---------- (٣)

أو :-

$\begin{cases} ص - س = ١ \\ ص + س - ١ = ٢٤ \end{cases}$ ومنها $\begin{cases} س = ١٢ \\ ص = ١٣ \end{cases}$ ---------- (٤)

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

بالتعويض من (٣) في (١)

∴ ع = − ٨٥

∴( س ، ص ، ع) = ( ٣ ، ٦ ، −٨٥ ) --- ( مرفوض)

بالتعويض من (٤) في (١)

∴ ع = ٥٧

∴ ( س ، ص ، ع) = (١٢، ١٣، ٥٧ )

وهي الإجابة الوحيدة الممكنة.

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paper1

**٣٤**

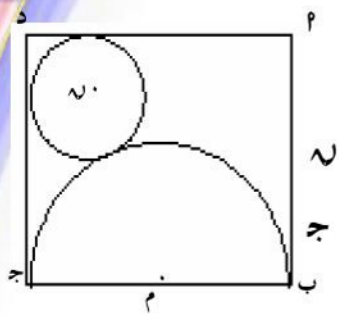
علي الشكل:

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٢ سم ،

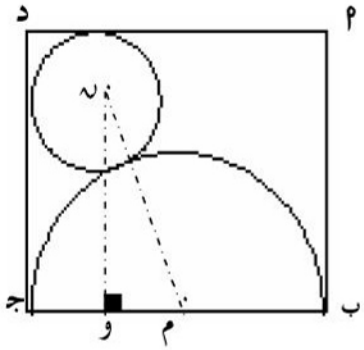
ب جـ قطر لنصف الدائرة م والتي تمس الدائرة ن

والتي تمس هي الأخرى ضلعي المربع أ د ، د جـ

احسب نصف قطر الدائرة ن .




[المصدر : مسابقة ولاية وسكنسون الأمريكية- التصفية الأولى – أكتوبر ٢٠٠٥م ]




نصل : م ن ، نسقط : ن و ⊥ ب جـ

نفرض أن نصف قطر الدائرة ن = نق

∵ م منتصف ب جـ ، ∵ | ب جـ | = ٢سم

∴ نصف قطر الدائرة م = ١ سم

∴ | م ن | = ١ + نق

∵ | ن و | = | د جـ | − نق = ٢ − نق

، ∵ | و م | = ١ − نق

في △ م ن و القائم في زاوية و

∴ ( ١ + نق )$^{٢}$ = ( ٢ − نق )$^{٢}$ + ( ١ − نق )$^{٢}$

∴ ١ + ٢ نق + نق$^{٢}$ = ٤ − ٤نق + ٤ نق$^{٢}$ + ١ − ٢ نق + نق$^{٢}$

∴ نق$^{٢}$ − ٨ نق + ٤ = صفر

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية في مجهول واحد

نق = ٤ ± ٢ $\sqrt{٣}$

∵ $\sqrt{٣}$ > ١ ومنها : نق = ٤ + ٢ $\sqrt{٣}$

∴ نق > ٦ ( وهذا مستحيل )

∴ نق = ٤ − ٢ $\sqrt{٣}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٣٥**

أوجد مجموعة حل المعادلة (حيث س ∈ ح+) :-

$$٢٧^{س} - ٩^{س-١} - ٣^{س+١} + \frac{١}{٣} = صفر$$

[ المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية- ٩ مارس ٢٠٠٦م]

$$٢٧^{س} - ٩^{س-١} - ٣^{س+١} + \frac{١}{٣} = صفر$$

$$٣^{٣س} - ٣^{٢س} \times ٣^{-٢} - ٣^{س} \times ٣ + \frac{١}{٣} = صفر$$

$$٣^{٣س} - \frac{١}{٩} \times ٣^{٢س} - ٣^{س} \times ٣ + \frac{١}{٣} = صفر$$

نفرض أن : $٣^{س} = ص$

$\therefore$ $ص^{٣} - \frac{١}{٩} ص^{٢} - ٣ ص + \frac{١}{٣} = صفر$

$\therefore$ $(ص^{٣} - \frac{١}{٩} ص^{٢}) - (٣ ص - \frac{١}{٣}) = صفر$

$\therefore$ $ص^{٢} (ص - \frac{١}{٩}) - ٣ (ص - \frac{١}{٩}) = صفر$

$\therefore$ $(ص^{٢} - ٣)(ص - \frac{١}{٩}) = صفر$

$\therefore$ $ص^{٢} - ٣ = صفر$ ، ومنها : $ص = \sqrt{٣}$

$\therefore$ $٣^{س} = \sqrt{٣}$

$\therefore$ $٣^{س} = ٣^{\frac{١}{٢}}$ ومنها : $س = \frac{١}{٢}$

$ص - \frac{١}{٩} = صفر$

$\therefore$ $ص = \frac{١}{٩}$

$\therefore$ $٣^{س} = ٣^{-٢}$

$\therefore$ $س = -٢$ $\therefore$ مجموعة حل المعادلة = $\{\frac{١}{٢}، -٢\}$.

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٣٦**

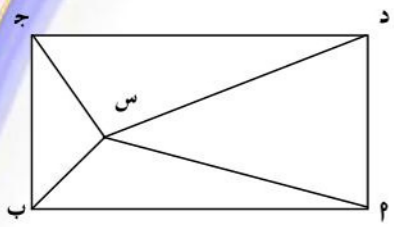
إذا كانت :

س نقطة تقع داخل المستطيل أ ب جـ د

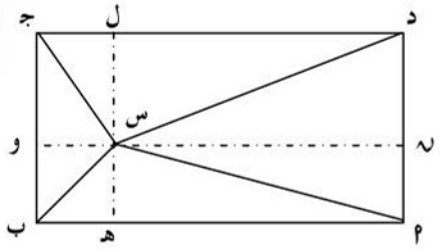
بحيث أن :-

| أ س| = ٩ سم ، | ب س| = ٤ سم ،

| جـ س| = ٦سم ، أوجد :| جـ د|.




[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية -٢٣فبراير ٢٠٠٥ م]




نرسم : $\overleftarrow{\text{ن و}}$ ⊥ أ د ، ب جـ

، نرسم : $\overleftarrow{\text{ل هـ}}$ ⊥ د جـ ، أ ب

في △ د س ل القائم في ∠ ل

| س د|$^2$ = | د ل|$^2$+|ل س|$^2$

= | أ هـ|$^2$+| جـ و|$^2$ ---------- (١)

في △ أ س هـ القائم في ∠ هـ

| أ هـ|$^2$= ٨١ -| س هـ|$^2$ ---------- (٢)

في △ س جـ و القائم في ∠ و

| جـ و|$^2$= ٣٦ - | هـ ب|$^2$ ---------- (٣)

بالتعويض من (٢) ، (٣) في (١)

∴ | س د|$^2$ = [ ٨١ -| س هـ|$^2$ ] + [ ٣٦ - | هـ ب|$^2$ ]

= ٨١ + ٣٦ - [ | س هـ|$^2$+ | هـ ب|$^2$ ]

= ٨١ + ٣٦ - ١٦

= ١٠١

| س د| = $\sqrt{١٠١}$ سم

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٣٧**

إذا كان : أ ب جـ د شكل رباعي فيه :-

جتا أ + جتا جـ = صفر ، وكانت ∠ ب حادة ،

أوجد قيمة : $\frac{\text{ظا ب}}{\text{ظا د}}$

[ دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية الجولة السادسة -٢٠٠٦م]

∵ جتا أ + جتا جـ = صفر

∴ جتا أ = - جتا جـ

∴ ∠ أ ، ∠ جـ متكاملتان

، ∵ أ ب جـ د شكل رباعي

∴ ∠ ب ، ∠ د متكاملتان

∴ ظا ب = - ظا د

∴ $\frac{\text{ظا ب}}{\text{ظا د}} = -١$

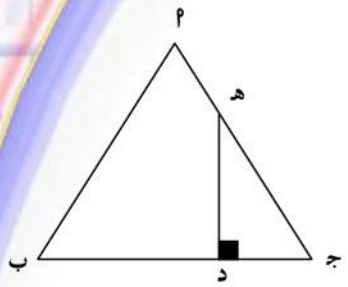
نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

**٣٨**

على الشكل :

أ ب جـ △ متطابق الأضلاع ،

طول ضلعه ٤ سم وفيه هـ د ⊥ ب جـ




وكذلك فيه : $\frac{\text{مساحة المثلث هـ جـ د}}{\text{مساحة الرباعي أ هـ د ب}} = \frac{١}{٣}$

أوجد : |هـ د|

[ دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية الجولة الثانية-٢٠٠٦م]

∵ أ ب جـ △ متطابق الأضلاع

∴ قياس زاويته = ٦٠°

نفرض أن : |جـ د| = س

∴ |د هـ| = س $\sqrt{٣}$ سم

∴ مساحة سطح △ هـ جـ د = $\frac{١}{٢}$ × س × س $\sqrt{٣}$ = $\frac{\text{س}^٢\sqrt{٣}}{٢}$ سم$^٢$

، مساحة سطح △ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ × جا ٦٠ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم$^٢$

∵ $\frac{\text{مساحة المثلث هـ جـ د}}{\text{مساحة الرباعي أ هـ د ب}} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{\text{مساحة المثلث هـ جـ د}}{\text{مساحة المثلث أ ب جـ}} = \frac{١}{٤}$

∴ $\frac{\frac{\text{س}^٢\sqrt{٣}}{٢}}{٤\sqrt{٣}} = \frac{١}{٤}$

∴ ٢ س$^٢$ $\sqrt{٣}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ ∴ س$^٢$ = ٢

∴ س = $\sqrt{٢}$

∵ |هـ د| = س $\sqrt{٣}$ سم

∴ |هـ د| = $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٣}$ = $\sqrt{٦}$ سم

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٣٩**

اثبت أن مميز المعادلة :

أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = صفر لا يساوي ٩٩

حيث : أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ص

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية -٢٣فبراير ٢٠٠٠م]

مميز المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + جـ = صفر هو : ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ

نفرض أن : ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٩٩

نلاحظ أن : ب لا يمكن أن يكون عدداً زوجياً

أي أن : ب عدداً فرديا

∴ يمكن وضع العدد ب على الصورة : ب = ٢ ن +١ ( حيث ∈ ص)

∴ ( ٢ ن +١)$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٩٩

∴ ٤ ن$^{٢}$ +٤ ن+١ − ٤ أ جـ = ٩٩

∴ ٤ ن$^{٢}$ +٤ ن− ٤ أ جـ = ٩٨

∴ ٤ ( ن$^{٢}$ + ن− أ جـ ) = ٩٨

، ∵ ٤ ليست من عوامل العدد ٩٨

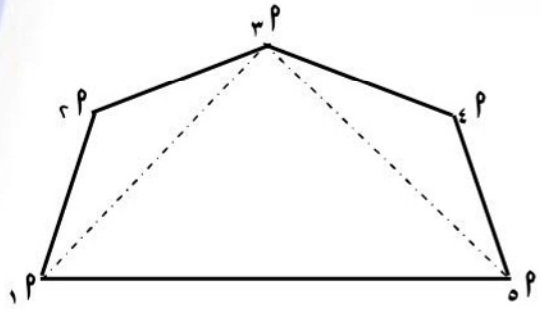
∴ ب$^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٩٩ ( علاقة مستحيلة )

**٤٠**

**إذا كان طول ضلع المضلع المنتظم $أ_١ أ_٢ أ_٣ ..... أ_{١٢}$ يساوي ٢ سم**

**أوجد مساحة سطح الشكل الخماسي $أ_١ أ_٢ أ_٣ أ_٤ أ_٥$**

**[ دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية - جولة الفرق -٢٠٠٦م]**




∵ قياس زاوية المضلع ذو الإثنى عشر وجه الداخلية

$= \frac{(١٢-٢)\times ١٨٠}{١٢} = \frac{١٠\times ١٨٠}{١٢} = ١٥٠^\circ$

∴ في $\triangle$ $أ_١ أ_٢ أ_٣$

قياس $\angle أ_٢ = ١٥٠^\circ$

∵ $|أ_١ أ_٢| = |أ_٢ أ_٣| = ٢$ سم

∴ مساحة سطح $\triangle$ $أ_١ أ_٢ أ_٣ = \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٢ \times$ جا ١٥٠

$= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$ سم$^٢$

بالمثل مساحة سطح $\triangle$ $أ_٣ أ_٤ أ_٥ = ١$ سم$^٢$

∵ قياس $\angle أ_٣ أ_٤ أ_٥$ = قياس $\angle أ_٢ أ_٣ أ_١ = ١٥^\circ$

∴ قياس $\angle أ_٥ أ_٣ أ_١ = ١٥٠^\circ - (١٥^\circ + ١٥^\circ) = ١٢٠^\circ$

∵ $|أ_٥ أ_٣| = |أ_٣ أ_١|$

باستخدام نظرية الزاوية المنفرجة في $\triangle$ $أ_١ أ_٢ أ_٣$

∴ $|أ_٣ أ_١|^٢ = |أ_٢ أ_٣|^٢ + |أ_١ أ_٢|^٢ - ٢ \times |أ_٢ أ_٣| |أ_١ أ_٢|$ جتا ١٥٠

$= ٤ + ٤ - ٢ \times ٢ \times ٢ \times (-\frac{\sqrt{٣}}{٢}) = ٨ + ٤\sqrt{٣}$

∴ مساحة سطح $\triangle$ $أ_٥ أ_٣ أ_١ = \frac{١}{٢}(٨ + ٤\sqrt{٣})$ جا١٢٠

$= \frac{١}{٢}(٨ + ٤\sqrt{٣}) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= (٢ + \sqrt{٣})\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣} + ٣$

∴ مساحة سطح الشكل الخماسي $أ_١ أ_٢ أ_٣ أ_٤ أ_٥ = ٢\sqrt{٣} + ٣ + ١ + ١$

$= ٢\sqrt{٣} + ٥$ سم$^٢$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

**٤١**

أوجد ثلاث قيم للمتغير س تعطي نفس قيمة ص في المعادلة :-

$$ص = ٩ س^{١٠٠} - ٤ س^{٩٨} + ١٩٨$$

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية -٢٤فبراير ١٩٩٩م]

$$ص = س^{٩٨} ( ٩س^{٢} - ٤ ) + ١٩٨$$

$$ص = س^{٩٨} ( ٣س + ٢) ( ٣س - ٢ ) + ١٩٨$$

- إذا كانت : س = صفر

فإن ص = ١٩٨

- إذا كانت : س = $-\frac{٢}{٣}$

فإن ص= ١٩٨

- إذا كانت : س = $\frac{٢}{٣}$

فإن ص= ١٩٨

∴ قيم س= { صفر ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ } تعطي نفس القيمة للمتغير ص =١٩٨

نادي الرياضيات السوفي
Mathematics club paper

**٤٢**

أوجد قيم الأعداد الحقيقية أ، ب، جـ والتي تحقق العلاقة :-

$$\frac{١}{س(س-٣)(س+١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-٣} + \frac{جـ}{س+١}$$

حيث س ≠ ٠ ، ٣ ، -١

[المصدر : مسابقة ولاية نيو ميكسيكو الأمريكية ١٣ نوفمبر ٢٠٠٤م]

$$\because \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س-٣} + \frac{جـ}{س+١} = \frac{أ(س-٣)(س+١) + ب \times س(س+١) + جـ \times س(س-٣)}{س(س-٣)(س+١)}$$

$$\therefore \frac{١}{س(س-٣)(س+١)} = \frac{أ(س-٣)(س+١) + ب \times س(س+١) + جـ \times س(س-٣)}{س(س-٣)(س+١)}$$

$\therefore$ أ(س - ٣)(س+١) + ب × س (س+١) + جـ × س (س - ٣) = ١

$\therefore$ أ(س$^٢$ - ٢س - ٣) + ب(س$^٢$ + س) + جـ(س$^٢$ + ٣س) = ١

$\therefore$ أس$^٢$ - ٢ أ س - ٣ أ + ب س$^٢$ + ب س + جـ س$^٢$ + ٣ جـ س = ١

$\therefore$ (أ + ب + جـ) س$^٢$ + (-٢ أ + ب - ٣ جـ) س - ٣ أ = ١

نستطيع كتابة العلاقة السابقة كالتالي:-

(أ + ب + جـ) س$^٢$ + (-٢ أ + ب - ٣ جـ) س - ٣ أ = صفر س$^٢$ + صفر س + ١

بمساواة المعاملات .

$\therefore$ أ + ب + جـ = صفر ----------(١)

، -٢ أ + ب - ٣ جـ = صفر ----------(٢)

، -٣ أ = ١ ومنها أ = $-\frac{١}{٣}$

بالتعويض عن قيمة : أ في (١) ، (٢)

$\therefore$ ب + جـ = $\frac{١}{٣}$ ، ب - ٣ جـ = $-\frac{٢}{٣}$ (بالطرح)

$\therefore$ ٤ جـ = ١ ومنها: جـ = $\frac{١}{٤}$

$\therefore$ ب = $\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{١٢}$

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paper

**٤٣**

**أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية :-**

- $\text{لو}_{\frac{1}{8}}\left(\text{لو}_{\frac{1}{4}}\left(\text{لو}_{\frac{1}{2}}\text{ س}\right)\right) = \frac{1}{3}$

- $\text{لو}_{3}\text{ س} + \text{لو}_{9}\text{ س} + \text{لو}_{27}\text{ س} = 11$

**[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية -٢٤فبراير ١٩٩٩م]**

- $\text{لو}_{\frac{1}{8}}\left(\text{لو}_{\frac{1}{4}}\left(\text{لو}_{\frac{1}{2}}\text{ س}\right)\right) = \frac{1}{3}$

$$\text{لو}_{\frac{1}{4}}\left(\text{لو}_{\frac{1}{2}}\text{ س}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{لو}_{\frac{1}{4}}\left(\text{لو}_{\frac{1}{2}}\text{ س}\right) = \left(2^{-3}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-1}$$

$$\text{لو}_{\frac{1}{4}}\left(\text{لو}_{\frac{1}{2}}\text{ س}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{لو}_{\frac{1}{2}}\text{ س} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = (2)^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ س} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \text{ س} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

▪ $\text{لو}_{٣}\,\text{س} + \text{لو}_{٩}\,\text{س} + \text{لو}_{٢٧}\,\text{س} = ١١$

$$\frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\,٣} + \frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\,٩} + \frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\,٢٧} = ١١$$

$$\frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\,٣} + \frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\,٣^{٢}} + \frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\,٣^{٣}} = ١١$$

$$\frac{١}{\text{لو}_{\text{س}}\,٣} + \frac{١}{٢\text{لو}_{\text{س}}\,٣} + \frac{١}{٣\text{لو}_{\text{س}}\,٣} = ١١$$ ( بالضرب في : $٦\ \text{لو}_{\text{س}}\,٣$)

$٦ + ٣ + ٢ = ٦٦\ \text{لو}_{\text{س}}\,٣$

$١١ = ٦٦\ \text{لو}_{\text{س}}\,٣$

$٦\ \text{لو}_{\text{س}}\,٣ = ١$

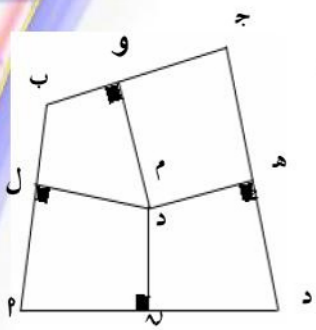
$\text{لو}_{\text{س}}\,٣ = \frac{١}{٦}$

$\text{س}^{\frac{١}{٦}} = ٣$

$\text{س} = ٣^{٦} = ٧٢٩$

**٤٤**

**علي الشكل:**




النقطة م تقع داخل الشكل الرباعي أ ب ج د

م ل ⊥ أ ب ، م و ⊥ ب ج ، م هـ ⊥ ج د ، م ن ⊥ أ د

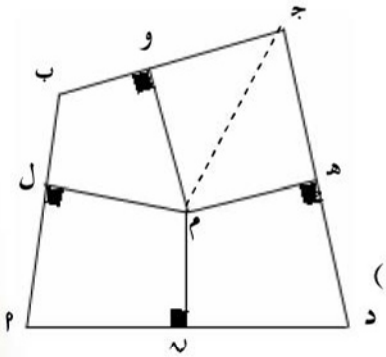
، |أ ل| = ٢ سم ، |ل ب| = ٤ سم ،

|ب و| = ١ سم ، |و ج| = ٣ سم ،

|هـ ج| = ٦ سم ، |د هـ| = ٤ سم

أثبت أن : النقطة ن منتصف $\overline{أ د}$ .

[ المصدر : مسابقة ولاية وسكنسون الأمريكية– التصفية الثالثة – ٢٠٠٤ – ٢٠٠٥م]




نصل : م ج

في △ △ م هـ ج ، م و ج القائما الزاوية

|ج و|$^2$ + |و م|$^2$ = |م ج|$^2$ = |م هـ|$^2$ + |هـ ج|$^2$

∴ |ج و|$^2$ – |هـ ج|$^2$ = |م هـ|$^2$ – |و م|$^2$ -------- (١)

بالمثل إذا رسمنا م د

∴ |هـ د|$^2$ – |د ن|$^2$ = |م ن|$^2$ – |هـ م|$^2$ -------- (٢)

وكذلك إذا رسمنا أ م

∴ |أ ن|$^2$ – |أ ل|$^2$ = |ل م|$^2$ – |م ن|$^2$ -------- (٣)

وأيضا عند رسم م ب

∴ |ل م|$^2$ – |م و|$^2$ = |و ب|$^2$ – |ب ل|$^2$ -------- (٤)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) ،(٤)

∴|ج و|$^2$ – |هـ ج|$^2$ + |هـ د|$^2$ – |د ن|$^2$ + |أ ن|$^2$ – |أ ل|$^2$ + |ل م|$^2$ – |م و|$^2$

= |م هـ|$^2$ – |و م|$^2$ + |م ن|$^2$ – |هـ م|$^2$ + |ل م|$^2$ – |م ن|$^2$ + |و ب|$^2$ – |ب ل|$^2$

∴ |ج و|$^2$ – |هـ ج|$^2$ +|هـ د|$^2$ – |د ن|$^2$+|أ ن|$^2$–|أ ل|$^2$ +|ل م|$^2$–|م و|$^2$–|م هـ|$^2$

+|و م|$^2$ – |م ن|$^2$ +|هـ م|$^2$ – |ل م|$^2$ +|م ن|$^2$ – |و ب|$^2$ +|ب ل|$^2$ = صفر

∴ ( |ل م|$^2$ – |ل م|$^2$) + ( |و م|$^2$–|م و|$^2$) + (|م ن|$^2$ – |م ن|$^2$)

+ ( |هـ م|$^2$ – |هـ م|$^2$) +|ج و|$^2$ – |هـ ج|$^2$ +|هـ د|$^2$ – |د ن|$^2$+|أ ن|$^2$–|أ ل|$^2$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

$- |\text{و ب}|^{٢} + |\text{ب ل}|^{٢} = \text{صفر}$

$\therefore |\text{ج و}|^{٢} - |\text{هـ ج}|^{٢} + |\text{هـ د}|^{٢} - |\text{د ن}|^{٢} + |\text{أ ن}|^{٢} - |\text{أ ل}|^{٢} - |\text{و ب}|^{٢} + |\text{ب ل}|^{٢} = \text{صفر}$

$\therefore ٩ - ٣٦ + ١٦ - |\text{د ن}|^{٢} + |\text{أ ن}|^{٢} - ٤ - ١ + ١٦ = \text{صفر}$

$\therefore ٤١ - ٤١ - |\text{د ن}|^{٢} + |\text{أ ن}|^{٢} = \text{صفر}$

$\therefore - |\text{د ن}|^{٢} + |\text{أ ن}|^{٢} = \text{صفر}$

$\therefore |\text{د ن}|^{٢} = |\text{أ ن}|^{٢}$

$\therefore |\text{د ن}| = |\text{أ ن}|$

$\therefore$ النقطة ن منتصف $\overline{\text{أ د}}$ .

**٤٥**

إذا كان :

$$٢^{ط}\ س + (٢^{ط} + ٥)\ ص = ٣^{\sqrt{٢}}\ س + (٣^{\sqrt{٢}} + ٥)\ ص$$

فأوجد قيمة : $\frac{س}{ص}$

[ دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية - الجولة الثانية-٢٠٠٤م]

نفرض أن : $٢^{ط} = أ$ ، $٣^{\sqrt{٢}} = ب$

$\therefore$ أ س + ( أ + ٥ ) ص = ب س + ( ب + ٥ ) ص

$\therefore$ أ س + أ ص + ٥ ص = ب س + ب ص + ٥ ص (بطرح ٥ص من الطرفين)

$\therefore$ أ س + أ ص = ب س + ب ص

$\therefore$ أ س − ب س = ب ص − أ ص

$\therefore$ س ( أ − ب ) = ص ( ب − أ )

$$\therefore \frac{س}{ص} = -\frac{أ - ب}{أ - ب}$$

$$\therefore \frac{س}{ص} = -١$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٤٦**

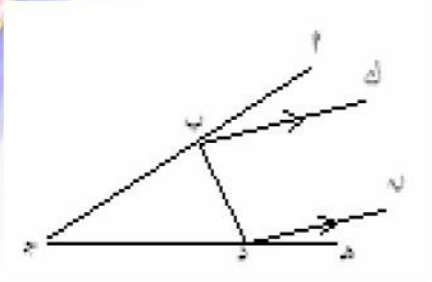
على الشكل :

قياس ∠ أ ب ك = $\frac{1}{6}$ قياس ∠ أ ب د

وقياس ∠ هـ د ن = $\frac{1}{6}$ قياس ∠ ب د هـ

وكان ب ك // د ن

احسب قياس : ∠ جـ




[ دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية - جولة الفرق -٢٠٠٤م]

نفرض أن : قياس ∠ أ ب د = س

، قياس ∠ ب د هـ = ص

∵ قياس ∠ أ ب ك = $\frac{1}{6}$ قياس ∠ أ ب د

∴ قياس ∠ك ب د = $\frac{5}{6}$ س

وبالمثل : قياس ∠ ن د ب = $\frac{5}{6}$ ص

∵ ب ك // د ن

∴ قياس ∠ك ب د + قياس ∠ ن د ب = ١٨٠ °

∴ $\frac{5}{6}$ س + $\frac{5}{6}$ ص = ١٨٠ °

∴ $\frac{5}{6}$ (س + ص ) = ١٨٠ °

∴ س + ص = ١٨٠ ° × $\frac{6}{5}$ = ٢١٦°

∴ قياس ∠ جـ دب + قياس ∠ جـ ب د = ٣٦٠° − ٢١٦° = ١٤٤°

∴ قياس ∠ جـ = ١٨٠ ° − ١٤٤° = ٣٦°

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

**٤٧**

حل المعادلة :

$$٣^{٢+س} + ٣^{٢-س} = ٨٢$$

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية -١٨فبراير ١٩٨٨م]

$$٣^{٢} \times ٣^{س} + ٣^{٢} \times ٣^{-س} = ٨٢$$

$$٩ \times ٣^{س} + ٩ \times ٣^{-س} = ٨٢$$

$$٩ \times ٣^{س} + \frac{٩}{٣^{س}} = ٨٢$$ ( بالضرب في: $٣^{س}$ )

$$٩ \times ٣^{س} \times ٣^{س} + ٩ - ٨٢ \times ٣^{س} = \text{صفر}$$

$$٩ \times (٣^{س})^{٢} - ٨٢ \times ٣^{س} + ٩ = \text{صفر}$$

نفرض أن : $٣^{س} = ص$

$\therefore$ $٩ ص^{٢} - ٨٢ص + ٩ = \text{صفر}$

$\therefore$ $(٩ص - ١)(ص - ٩) = \text{صفر}$

$\therefore$ $٩ص - ١ = \text{صفر}$ ومنها $ص = \frac{١}{٩}$

$\therefore$ $٣^{س} = \frac{١}{٩}$

$\therefore$ $٣^{س} = ٣^{-٢}$ ومنها $س = -٢$

أو : $ص - ٩ = \text{صفر}$

$\therefore$ $٣^{س} = ٩$

$\therefore$ $٣^{س} = ٣^{٢}$ ومنها $س = ٢$

قيم س التي تحقق المعادلة = $\{٢ ، -٢\}$.

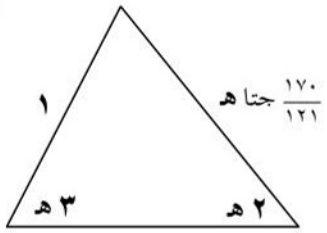
نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٤٨**

أ ب جـ مثلث فيه :قياس ∠ ب = ٢ هـ ، قياس ∠ جـ = ٣ هـ ،

|أ ب| = $\frac{١٧٠}{١٢١}$ جتا هـ ، |أ جـ| = ١ أوجد: قيمة جتا هـ العددية.

[ دوري الرياضيات لمدينة نيو إنجلاند الأمريكية - جولة الفرق -٢٠٠٣م]




نفرض أن : الكسر= $\frac{١٧٠}{١٢١}$ = س

من قانون الجيب :-

∴ $\frac{\text{س جتا هـ}}{\text{جا ٣ هـ}} = \frac{١}{\text{جا ٢ هـ}}$

∴ س جتا هـ = $\frac{\text{جا ٣ هـ}}{\text{جا ٢ هـ}}$

∴ س جتا هـ = $\frac{\text{جا ٣ هـ}}{\text{٢جا هـ جتا هـ}}$ ----------(١)

∵ جا ٣ هـ = جا ( ٢ هـ + هـ)

= جا٢ هـ جتا هـ + جتا٢ هـ جا هـ

= ( ٢جا هـ جتا هـ) جتا هـ + ( جتا$^{٢}$هـ − جا$^{٢}$ هـ) جا هـ

= ٢جا هـ جتا$^{٢}$هـ + جا هـ جتا$^{٢}$هـ − جا$^{٣}$ هـ

= ٣جا هـ جتا$^{٢}$هـ − جا$^{٣}$ هـ

= ٣جا هـ ( ١ − جا$^{٢}$هـ )− جا$^{٣}$ هـ

= ٣جا هـ − ٣جا$^{٣}$هـ − جا$^{٣}$ هـ

جا ٣ هـ = ٣جا هـ − ٤جا$^{٣}$هـ

بالتعويض في (١)

∴ س جتا هـ = $\frac{\text{٣جا هـ − ٤جا}^{٣}\text{هـ}}{\text{٢جا هـ جتا هـ}} = \frac{\text{جا هـ ( ٣ − ٤جا}^{٢}\text{هـ)}}{\text{٢جا هـ جتا هـ}} = \frac{\text{٣ − ٤جا}^{٢}\text{هـ}}{\text{٢ جتا هـ}}$

∴ ٢ س جتا$^{٢}$ هـ = ٣ − ٤جا$^{٢}$هـ

∴ ٢ س جتا$^{٢}$ هـ = ٣ − ٤ ( ١− جتا$^{٢}$ هـ)

∴ ٢ س جتا$^{٢}$ هـ = ٣ − ٤ + ٤ جتا$^{٢}$ هـ

∴ ٢ س جتا$^{٢}$ هـ = −١ + ٤ جتا$^{٢}$ هـ

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

$\therefore$ ٤ جتا$^{٢}$ هـ − ٢ س جتا$^{٢}$ هـ = ١

$\therefore$ ( ٤ − ٢ س) جتا$^{٢}$ هـ = ١

$\therefore$ جتا$^{٢}$ هـ = ١ ÷ ( ٤ − ٢ س)

$$\therefore \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = ١ \div \left( ٤ - ٢ \times \frac{١٧٠}{١٢١} \right)$$

$$\therefore \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = ١ \div \left( ٤ - \frac{٣٤٠}{١٢١} \right)$$

$$\therefore \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = ١ \div \left( \frac{٤٨٤ - ٣٤٠}{١٢١} \right)$$

$$\therefore \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = ١ \div \left( \frac{١٤٤}{١٢١} \right)$$

$$\therefore \text{جتا}^{٢}\text{هـ} = \frac{١٢١}{١٤٤}$$

$$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{١١}{١٢}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٤٩**

بفرض أن :

س ، ص زاويتين ، جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$ص = $\frac{٣}{٢}$ أ ، جتا$^{٢}$س + جا$^{٢}$ص = $\frac{١}{٢}$ أ$^{٢}$

أوجد جميع القيم الممكنة للعدد أ

[المسابقات الكندية العامة – مسابقة معهد اقليدس- ١٩ ابريل ٢٠٠٦م]

جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$ص = $\frac{٣}{٢}$ أ ----------(١)

جتا$^{٢}$س + جا$^{٢}$ص = $\frac{١}{٢}$ أ$^{٢}$ ----------(٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$ص +جتا$^{٢}$س + جا$^{٢}$ص = $\frac{٣}{٢}$ أ + $\frac{١}{٢}$ أ$^{٢}$

∴ (جا$^{٢}$س +جتا$^{٢}$س )+ ( جتا$^{٢}$ص + جا$^{٢}$ص ) = $\frac{٣}{٢}$ أ + $\frac{١}{٢}$ أ$^{٢}$

∴ $\frac{٣}{٢}$ أ + $\frac{١}{٢}$ أ$^{٢}$ = ٢ ( بالضرب × ٢)

∴ ٣ أ + أ$^{٢}$ = ٤

∴ أ$^{٢}$ + ٣ أ − ٤ = صفر

∴ ( أ + ٤ ) ( أ − ١) = صفر

∴ أ + ٤ = صفر

∴ أ = −٤ ( مستحيلة : لأن جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$ص = $\frac{٣}{٢}$ × − ٤ = قيمة سالبة)

أو : أ− ١ = صفر

∴ أ = ١ ( هي الإجابة الممكنة ).

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٥٠**

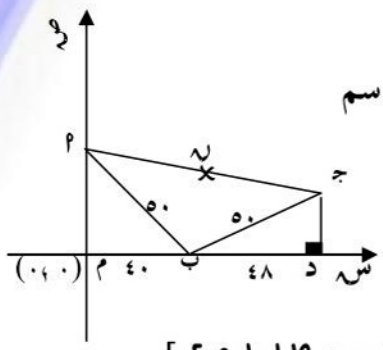
على الشكل :

جـ د ⊥ محور س ، | أ ب| = | ب جـ| = ٥٠سم

، | ب د | = ٤٨سم ، | م ب| = ٤٠ سم ،

ن منتصف أ جـ.

أوجد : احداثيا نقطة ن




[المسابقات الكندية العامة – مسابقة معهد اقليدس- ١٩ ابريل ٢٠٠٥م]

في △ أ ب م

∵| أ م|$^{٢}$ = (٥٠)$^{٢}$ − (٤٠)$^{٢}$

= ٢٥٠٠ − ١٦٠٠

= ٩٠٠

∴ | أ م|= ٣٠

بالمثل في : △ جـ ب د

∵| جـ د|$^{٢}$ = (٥٠)$^{٢}$ − (٤٨)$^{٢}$

∴ | جـ د|=١٤

∴ إحداثيا النقطة جـ = ( ٤٨ + ٤٠ ، ١٤ ) = ( ٨٨ ، ١٤ )

، إحداثيا النقطة أ = ( ٠ ، ٣٠ )

∴ إحداثيا النقطة ن = $\left(\frac{٨٨+٠}{٢}, \frac{١٤+٣٠}{٢}\right)$

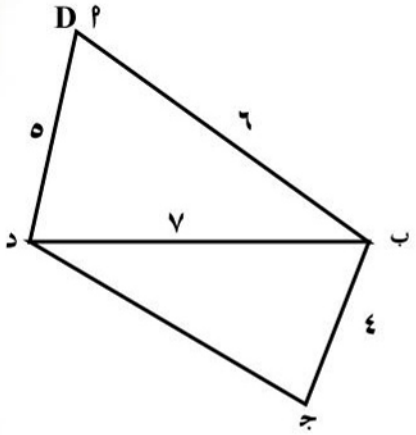
= (٤٤ ، ٢٢ ).

**٥١**

أ ب جـ د شكل رباعي فيه:

قياس ∠ أ + قياس ∠ جـ = ١٨٠ ، | أ ب | = ٦سم، | أ د | = ٥ سم ، | ب جـ | = ٤سم ، | ب د | = ٧ سم . أوجد | جـ د |

[المسابقات الكندية العامة – مسابقة معهد اقليدس- ١٩ ابريل ٢٠٠٥م]




باستخدام قانون جيب تمام الزاوية في △ أ ب د

∴ | ب د |$^{٢}$ = | أ د |$^{٢}$ + | أ ب |$^{٢}$ − ٢ | أ ب | | أ د | جتا أ

∴ ٤٩ = ٢٥ + ٣٦ − ٢ × ٥ × ٦ × جتا أ

∴ ٤٩ = ٦١ − ٦٠ جتا أ

∴ جتا أ = $\frac{٦١ - ٤٩}{٦٠} = \frac{١٢}{٦٠} = \frac{١}{٥}$

∵ ∠ أ + ∠ جـ = ١٨٠°

∴ ∠ جـ = ١٨٠° − ∠ أ

∴ جتا جـ = جتا (١٨٠° − أ)

∴ جتا جـ = − جتا أ

∴ جتا جـ = $-\frac{١}{٥}$

بتطبيق قانون جيب تمام الزاوية مرة أخرى على △ ب جـ د

∴ | ب د |$^{٢}$ = | ب جـ |$^{٢}$ + | جـ د |$^{٢}$ − ٢ | ب جـ | | جـ د | جتا جـ

∴ ٤٩ = ١٦ + | جـ د |$^{٢}$ − ٢ × ٤ | جـ د | × $-\frac{١}{٥}$

∴ ٤٩ = ١٦ + | جـ د |$^{٢}$ + $\frac{٨}{٥}$ | جـ د |

∴ | جـ د |$^{٢}$ + $\frac{٨}{٥}$ | جـ د | − ٣٣ = صفر (بالضرب × ٥)

∴ ٥ | جـ د |$^{٢}$ + ٨ | جـ د | − ١٦٥ = صفر

∴ [ ( ٥ | جـ د | + ٣٣ ] [ | جـ د | − ٥ ] = صفر

∴ | جـ د | = $-\frac{٣٣}{٥}$ (مرفوض)

∴ | جـ د | = ٥ سم

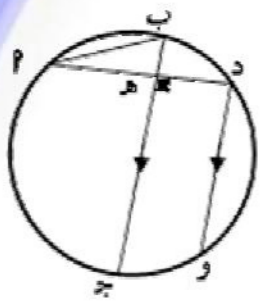
**٥٢**

على الشكل :

أ ب ، ب جـ وتران في دائرة ، بحيث أ ب < ب جـ

إذا كانت د نقطة على الدائرة بحيث أ د ⊥ ب جـ ،

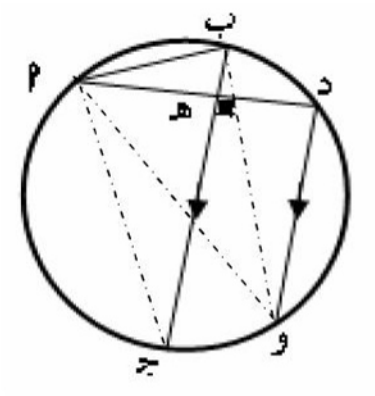
وكان د و // ب جـ.




اثبت أن :

قياس ∠ و أ جـ + قياس ∠ أ ب جـ = ٩٠°

[المسابقات الكندية العامة – مسابقة معهد اقليدس- ١٩ ابريل ٢٠٠٦م]




نصل كل من : أ جـ ، أو ، ب و

∵ أ د ⊥ ب جـ

∴ قياس ∠ أ هـ جـ = ٩٠°

∵ د و // ب جـ .

∴ قياس ∠ أ د و ( المحيطية ) = ٩٠°

∴ أو قطر في الدائرة

∵ ∠ و أ جـ = ∠ و ب جـ ( محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{وجـ}$ ) ----------(١)

، ∵ قياس ∠ و ب أ = ٩٠° ( محيطية مرسومة ف ينصف دائرة )

∴ قياس ∠ و ب جـ + قياس ∠ أ ب جـ = = ٩٠° ----------(٢)

من (١) ، (٢)

∴ قياس ∠ و أ جـ + قياس ∠ أ ب جـ = ٩٠°

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

**٥٣**

أوجد قيمة : (أ) $\frac{١}{٦}+\frac{١}{١٢}+\frac{١}{٢٠}+\frac{١}{٣٠}+\frac{١}{٤٢}+\frac{١}{٥٦}+\frac{١}{٧٢}+\frac{١}{٩٠}=$

(ب) $\sqrt{٤+\sqrt{٧}}+\sqrt{٤-\sqrt{٧}}$

[ الأولمبياد الأول للرياضيات – المملكة العربية السعودية – التصفية الأولى – ٢٠٠٦م]

(أ) $\frac{١}{٦}+\frac{١}{١٢}+\frac{١}{٢٠}+\frac{١}{٣٠}+\frac{١}{٤٢}+\frac{١}{٥٦}+\frac{١}{٧٢}+\frac{١}{٩٠}$

$=\left(\frac{١}{٢}-\frac{١}{٣}\right)+\left(\frac{١}{٣}-\frac{١}{٤}\right)+\left(\frac{١}{٤}-\frac{١}{٥}\right)+\left(\frac{١}{٥}-\frac{١}{٦}\right)+\left(\frac{١}{٦}-\frac{١}{٧}\right)+\left(\frac{١}{٧}-\frac{١}{٨}\right)+\left(\frac{١}{٨}-\frac{١}{٩}\right)+\left(\frac{١}{٩}-\frac{١}{١٠}\right)$

$=\frac{١}{٢}-\frac{١}{٣}+\frac{١}{٣}-\frac{١}{٤}+\frac{١}{٤}-\frac{١}{٥}+\frac{١}{٥}-\frac{١}{٦}+\frac{١}{٦}-\frac{١}{٧}+\frac{١}{٧}-\frac{١}{٨}+\frac{١}{٨}-\frac{١}{٩}+\frac{١}{٩}-\frac{١}{١٠}$

$=\frac{١}{٢}-\frac{١}{١٠}=\frac{٢}{٥}$

(ب) $\sqrt{٤+\sqrt{٧}}+\sqrt{٤-\sqrt{٧}}$

نفرض أن $س=\sqrt{٤+\sqrt{٧}}$

$\therefore س^{٢}=٤+\sqrt{٧}$ ---------- (١)

ونفرض كذلك أن : $ص=\sqrt{٤-\sqrt{٧}}$

$\therefore ص^{٢}=٤-\sqrt{٧}$

ونفرض أن : $ع=س+ص$ ---------- (٢)

$\therefore ع^{٢}=س^{٢}+ص^{٢}+٢س ص$ ---------- (٣)

بالتعويض : من (١) ، (٢) في (٣)

$\therefore ع^{٢}=٤+\sqrt{٧}+٤-\sqrt{٧}+٢\left(\sqrt{٤+\sqrt{٧}}\ \sqrt{٤-\sqrt{٧}}\right)$

$\therefore ع^{٢}=٨+٢\left(\sqrt{(٤+\sqrt{٧})(٤-\sqrt{٧})}\right)$

$\therefore ع^{٢}=٨+٢\sqrt{٩}$

$ع^{٢}=٨+٢\times٣=١٤$

$ع=\sqrt{١٤}$.

**٥٤**

**إذا كان : س ، ص ، ع أعداداً حقيقية ≠ الصفر وتحقق نظام المعادلات**

$$س + ص + ع = ث$$

$$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ث^{٢} - ٤$$

$$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = \frac{١}{٦٠}$$

**لعدد حقيقي ثابت ث ، فما حاصل الضرب س ص ع**

**[ الأولمبياد الأول للرياضيات – المملكة العربية السعودية – النصفية الأولى - ٢٠٠٦م]**

$$\because \frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = \frac{ص ع + س ع + س ص}{س ص ع} = \frac{١}{٦٠}$$

$\therefore$ س ص ع = ٦٠ ( ص ع + س ع + س ص) -------- (١)

$\because$ ( س + ص + ع )$^{٢}$ = س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ + ٢ ص ع + ٢س ع + ٢س ص -------- (٢)

$\therefore$ ( س + ص + ع )$^{٢}$ = س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ + ٢ ( ص ع + س ع + س ص )

$\because$ س + ص + ع = ث -------- (٣)

، $\because$ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ع$^{٢}$ = ث$^{٢}$ − ٤ ---------- (٤)

بالتعويض من : (٢) ، (٣) في (١)

$\therefore$ ث$^{٢}$ = ث$^{٢}$ − ٤ + ٢ ( ص ع + س ع + س ص)

$\therefore$ ص ع + س ع + س ص = ٢ ---------- (٥)

بالتعويض من : (٥) في (١)

$\therefore$ س ص ع = ٦٠ × ٢

$\therefore$ س ص ع = ١٢٠

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paper

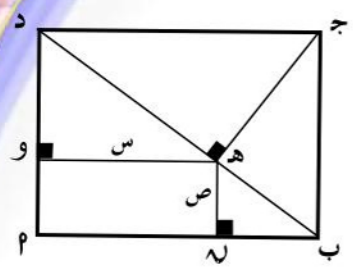
**٥٥**

على الشكل : أ ب جـ د مستطيل فيه

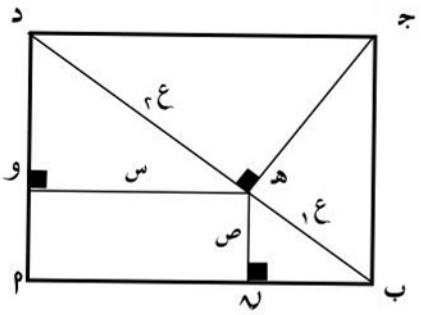
جـ هـ ⊥ القطر ب د، هـ و ⊥ أ د ، هـ ن ⊥ أ ب .

إذا كان : |هـ و| = س ، |هـ ن| = ص

أوجد |ب د| بدلالة س، ص




[المصدر : مسابقة ولاية نيو ميكسيكو الأمريكية – ٥ فبراير ٢٠٠٥ م]




نفرض أن : |د هـ| = ع٢ ، |هـ ب| = ع١

في △△ د هـ جـ ، هـ و د

∵ ∠ جـ هـ د = ∠ د و هـ = ٩٠°

، ∵ ∠ جـ د هـ + ∠ هـ د و = ٩٠°

، ∵ ∠ جـ د هـ + ∠ هـ جـ د = ٩٠°

∴ ∠ هـ د و = ∠ هـ جـ د

∴ يتشابه △△ د جـ هـ ، هـ و د وينتج أن :-

$$\frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{هـ د}}$$

$$\therefore \frac{\text{ع}_2}{\text{س}} = \frac{\text{د جـ}}{\text{ع}_2}$$

$$\therefore \text{ع}_1^2 = \text{س} \times \text{د جـ} \quad \text{----------(١)}$$

في △ ن ب هـ القائم في ∠ ن

$$|\text{ب ن}|^2 = |\text{ب هـ}|^2 - |\text{ن هـ}|^2$$

$$\therefore |\text{ب ن}|^2 = |\text{ب هـ}|^2 - \text{ص}^2$$

$$\therefore |\text{ب ن}| = \sqrt{|\text{ب هـ}|^2 - \text{ص}^2}$$

من تشابه △△ هـ ب ن ، ب جـ هـ

$$\frac{\text{هـ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{هـ ن}}{\text{ب هـ}}$$

$$\therefore |\text{ب هـ}|^2 = \text{ب جـ} \times \text{ص}$$

$$\because \text{ب جـ} = \text{ص} + \text{د و}$$

$$\therefore |\text{ب هـ}|^2 = \text{ص} \times (\text{ص} + \text{د و})$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

$\therefore |\text{ب هـ}|^{٢} = \text{ص}^{٢} + \text{ص} \times \text{د و}$ ----------(٢)

في $\triangle$ د هـ و القائم في $\angle$ و

$|\text{د و}| = \sqrt{\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢}}$ ----------(٣)

من (٢) ، (٣)

$\therefore |\text{ب هـ}|^{٢} = \text{ص}^{٢} + \text{ص}\sqrt{\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢}}$ ----------(٤)

، $\because |\text{ب ن}| = \sqrt{|\text{ب هـ}|^{٢} - \text{ص}^{٢}}$

$\therefore |\text{ب ن}| = \sqrt{\text{ص}^{٢} + \text{ص}\sqrt{\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢}} - \text{ص}^{٢}}$

$\therefore |\text{ب ن}| = \sqrt{\text{ص}\sqrt{\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢}}}$

$= (\text{ص}\sqrt{\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢}})^{\frac{١}{٢}}$

$= [\text{ص}(\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}]^{\frac{١}{٢}}$

$= \text{ص}^{\frac{١}{٢}}(\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٤}}$

$\because \text{ج د} = \text{س} + \text{ب ن}$

$\therefore \text{ج د} = \text{س} + \text{ص}^{\frac{١}{٢}}(\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٤}}$ ----------(٥)

من (٥) ، (١)

$\therefore \text{ع}_{٢}^{٢} = \text{س} \times [\text{س} + \text{ص}^{\frac{١}{٢}}(\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٤}}]$

$\therefore \text{ع}_{٢}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{س ص}^{\frac{١}{٢}}(\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٤}}$

$\therefore \text{ع}_{٢}^{٢} - \text{س}^{٢} = \text{س ص}^{\frac{١}{٢}}(\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٤}}$

$\therefore \text{ع}_{٢}^{٢} - \text{س}^{٢} \div (\text{ع}_{١}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٤}} = \text{س ص}^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore (\text{ع}_{٢}^{٢} - \text{س}^{٢})^{١ - \frac{١}{٤}} = \text{س ص}^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore (\text{ع}_{٢}^{٢} - \text{س}^{٢})^{\frac{٣}{٤}} = \text{س ص}^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore \text{ع}_{٢}^{٢} - \text{س}^{٢} = [\text{س ص}^{\frac{١}{٢}}]^{\frac{٤}{٣}}$

$\therefore \text{ع}_{٢}^{٢} - \text{س}^{٢} = \text{س}^{\frac{٤}{٣}}\ \text{ص}^{\frac{٢}{٣}}$

$\text{ع}_{٢}^{٢}$ $\quad \frac{٤}{٣} \quad \frac{٢}{٣}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

$\therefore \quad = \text{س} \quad \text{ص} \quad + \text{س}^{٢}$

$\therefore \text{ع}_{٢} = |\text{هـ د}| = \sqrt{\text{س}^{\frac{٤}{٣}} \ \text{ص}^{\frac{٢}{٣}} \ + \text{س}^{٢}}$

$\therefore |\text{ب هـ}| = \sqrt{\text{ص}^{٢} + \text{ص}\sqrt{\text{ع}_{٢}^{٢} - \text{س}^{٢}}}$ ----------(٦)

$\because |\text{ب د}| = |\text{ب هـ}| + |\text{د هـ}|$ ----------(٧)

بالتعويض من (٦) في (٧)

$\therefore |\text{ب د}| = \sqrt{\text{س}^{\frac{٤}{٣}} \ \text{ص}^{\frac{٢}{٣}} \ + \text{س}^{٢}} + \sqrt{\text{ص}^{٢} + \text{ص}\sqrt{\text{ع}_{٢}^{٢} - \text{س}^{٢}}}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

**٥٦**

**اكتب في أبسط صورة :**

$$٣+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\cfrac{١}{٣+\cdots}}}}}$$

**[المصدر : البطولة السنوية لمعهد ملتون الأمريكي – ٢٥ فبراير٢٠٠٦م]**

نفرض أن : $س = \cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\boxed{\cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+\cfrac{١}{٣+\cdots}}}}}} = \cfrac{١}{٣+\cfrac{١}{٦+س}} = \cfrac{١}{\cfrac{١٨+٣س+١}{٦+س}}$

$$\therefore س = \frac{٦+س}{١٨+٣س+١} = \frac{٦+س}{١٩+٣س}$$

$\therefore$ س ( ١٩ + ٣ س ) = ٦ + س

$\therefore$ ١٩ س + ٣ س$^{٢}$ = ٦ + س

$\therefore$ ١٩ س + ٣ س$^{٢}$ − ٦ − س = صفر

$\therefore$ ٣ س$^{٢}$ + ١٨ س − ٦ = صفر  بالقسمة على ٣

$\therefore$ س$^{٢}$ + ٦ س − ٢ = صفر

وبحل المعادلة باستخدام القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$\therefore$ س = −٣ ± $\sqrt{١١}$  ( الإجابة السالبة مرفوضة)

$\therefore$ س = −٣ + $\sqrt{١١}$

نادي الرياضيات
Mathematics club papers

$$\because \quad \text{س} + ٣ = ٣ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cdots}}}}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{١١} + ٣ - + ٣ = ٣ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cdots}}}}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{١١} = ٣ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cfrac{١}{٦ + \cfrac{١}{٣ + \cdots}}}}}$$

**٥٧**

إذا كانت :

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٠$ ، $\sqrt[٤]{س ص} + \sqrt{س ص} + ٢٧ = ٢٩$

أوجد قيمة : س + ص

[المصدر : البطولة السنوية لمعهد ملتون الأمريكي –٢٠ نوفمبر ٢٠٠٤م]

نفرض أن : $ك = \sqrt[٤]{س ص}$

$\therefore ك = (س ص)^{\frac{١}{٤}}$

$\therefore ك^{٤} = س ص$

$\therefore ك^{٢} = \sqrt{س ص}$

$\therefore$ بالتعويض في المعادلة : $\sqrt[٤]{س ص} + \sqrt{س ص} + ٢٧ = ٢٩$

$\therefore ك + ك^{٢} + ٢٧ = ٢٩$

$\therefore ك^{٢} + ك - ٢ = صفر$

$\therefore (ك + ٢)(ك - ١) = صفر$

$\therefore ك = -٢$

$\therefore \sqrt[٤]{س ص} = -٢$ ( مرفوض )

، $\therefore \sqrt{س ص} = ١$

$\therefore س ص = ١$

بفرض أن : $س + ص = ع$

بالتربيع $\therefore س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} = ع^{٢}$

$\therefore س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ص = ع^{٢}$

$\therefore (س^{٢} + ص^{٢}) + ٢س ص = ع^{٢}$

$\therefore ١٠ + ٢ \times ١ = ع^{٢}$

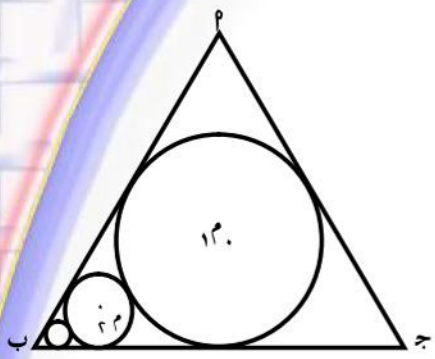
$\therefore ع^{٢} = ١٢$

$\therefore ع = \sqrt{١٢}$

$\therefore س + ص = \sqrt{١٢}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

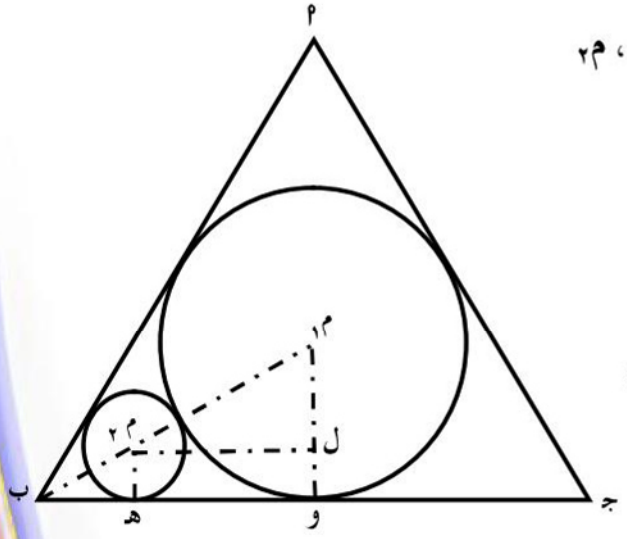
**٥٨**




أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه الوحدة $م_1$ دائرة مرسومه داخله تمس أضلاعه الداخلية $م_2$ دائرة مرسومة داخل المثلث تمس ضلعيه ب جـ ، أ ب و تمس الدائرة $م_1$، وكذلك $م_3$ دائرة مرسومة تمس ب جـ ، أ ب وتمس الدائرة $م_2$ وهكذا إذا رسمنا الدوائر : $م_4$، $م_5$ ، $م_6$ .....

أوجد مجموع مساحات هذه الدوائر إلى مالا نهاية.

[ المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية-١٢مارس ٢٠٠٣م]




نفرض أن : $نق_1$ ، $نق_2$ نصفي اقطار الدائرتين $م_1$ ، $م_2$

نصل : $م_1$ ب ، $م_1$ و ، $م_2$ هـ

نرسم : $م_2$ ل ⊥ $م_1$ و

∵ أ ب جـ △ متطابق الأضلاع

∴ ∠ ب = ٦٠°

∵ ب جـ ، ب أ مماسان للدائرة $م_1$ من نقطة واحدة

∴ $م_1$ ب ينصف ∠ ب

∴ ∠ $م_1$ ب جـ = ٣٠°

∵ $م_2$ ل // ب جـ

∴ ∠ $م_1$ $م_2$ ل = ٣٠°

$$∵ جا\ م_1\ م_2\ ل = \frac{م_1\ ل}{م_1\ م_2} = \frac{نق_1 - نق_2}{نق_1 + نق_2}$$

، $$∵ جا\ م_1\ م_2\ ل = \frac{1}{2}$$

$$∴ \frac{نق_1 - نق_2}{نق_1 + نق_2} = \frac{1}{2}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

∴ ٢ (نق١ − نق٢) = نق١ + نق٢

∴ ٢ نق١ − ٢ نق٢ = نق١ + نق٢

∴ نق١ = ٣ نق٢ ، ∴ نق٢ = $\frac{١}{٣}$ نق١ بالمثل : نق٣ = $\frac{١}{٣}$ نق٢

∴ نق٣ = $\frac{١}{٣}$ نق٢ = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٣}$ نق١) = $\frac{١}{٣^٢}$ نق١ وهكذا

∴ مجموع مساحات الدوائر إلى ما لانهاية = ط ( نق١)$^٢$ + ط ($\frac{١}{٣}$ نق١)$^٢$ + ط ( $\frac{١}{٣^٢}$ نق١)$^٢$ +.....

= ط ( نق١)$^٢$ $\left[١+\frac{١}{٩}+\frac{١}{٨١}+.....\right]$

∵ $\left[١+\frac{١}{٩}+\frac{١}{٨١}+.....\right]$ يمثل متوالية هندسية غير منهية حدها الأول أ = ١ وأساسها : ر = $\frac{١}{٩}$ ÷ ١ = $\frac{١}{٩}$

∵ مجموع المتوالية الهندسية الغير منتهية = $\frac{أ}{١-ر}$

∴ مجموع المتوالية = $\frac{١}{١-\frac{١}{٩}}$ = $\frac{١}{\frac{٨}{٩}}$ = $\frac{٩}{٨}$

∴ مجموع مساحات الدوائر إلى ما لانهاية = ط ( نق١)$^٢$ × $\frac{٩}{٨}$

= $\frac{٩}{٨}$ ط ( نق١)$^٢$

∵ في △ م١ ب و القائم في ∠ و ،

∵ ظا ٣٠° = $\frac{م١و}{و ب}$ = نق١ ÷ $\frac{١}{٢}$

∴ نق١ = $\frac{١}{٢}$ ظا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$

∴ مجموع مساحات الدوائر إلى ما لانهاية = $\frac{٩}{٨}$ ط ($\frac{\sqrt{٣}}{٦}$)$^٢$

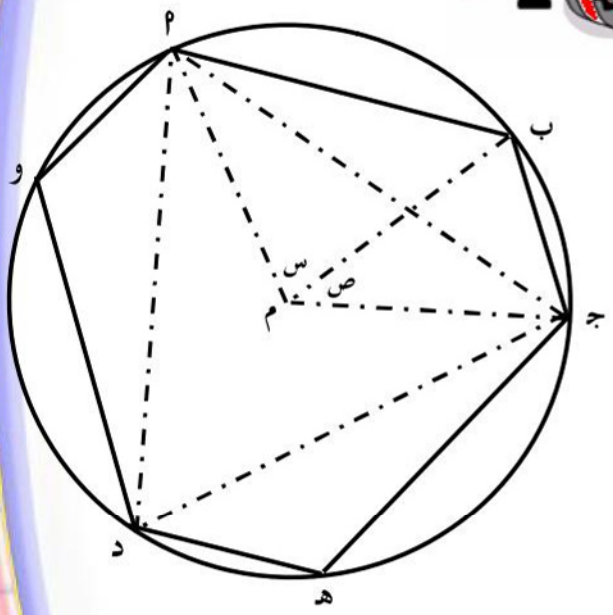
= $\frac{٣}{٣٢}$ ط وحدة مربعة.

**٥٩**

على الشكل المجاور : سداسي غير منتظم فيه أطوال ثلاث أضلاع غير متتالية = ١ سم ، الثلاث أضلاع الغير متتالية الأخرى = ٣ سم .

أوجد مساحة السداسي.

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢٣ فبراير ٢٠٠٠ م]




نصل : أ جـ ، جـ د ، أ د ، أ م ، ب م ، جـ م

نفرض أن : ∠ ب م أ = س

∠ جـ م ب = ص

من تطابق △ △ △ أ ب جـ ، هـ جـ د ، و د أ

∴ |أ د| = |جـ د| = |أ جـ|

∴ △ أ جـ د متطابق الأضلاع

∴ ∠ جـ د أ = ٦٠° محيطية

∴ ∠ جـ م أ المركزية = ١٢٠°

∴ س + ص = ١٢٠°

∴ $\left(\frac{\text{ص}}{٢} + \frac{\text{س}}{٢}\right) = ٦٠°$ ---------- (١)

في △ ب جـ م المتطابق الضلعين ( م جـ = م ب = نق )

∴ ∠ م ب جـ = ∠ م جـ ب = $\frac{١٨٠° - \text{ص}}{٢}$

، بالمثل في △ أ ب م : ∠ م ب أ = $\frac{١٨٠° - \text{س}}{٢}$

∴ ∠ أ م جـ = $\frac{١٨٠° - \text{ص}}{٢} + \frac{١٨٠° - \text{س}}{٢}$

= $٩٠° - \frac{\text{ص}}{٢} + ٩٠° - \frac{\text{س}}{٢}$

= $١٨٠° - \left(\frac{\text{ص}}{٢} + \frac{\text{س}}{٢}\right)$

∴ من (١) ∴ ∠ أ م جـ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

باستخدام قانون جيب التمام في △ أ ب جـ

$|\text{أ جـ}|^{٢} = |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢} - ٢\,|\text{أ ب}| \times |\text{ب جـ}|\ \text{جتا}\ (\text{أ ب جـ})$

$\therefore\ |\text{أ جـ}|^{٢} = ٩ + ١ - ٢ \times ٣ \times ١ \times \text{جتا}\ ١٢٠^{\circ}$

$= ٩ + ١ - ٦ \times \left(-\frac{١}{٢}\right)$

$= ١٣$

$\therefore\ |\text{أ جـ}| = \sqrt{١٣}$

∵ مساحة سطح السداسي: أ ب جـ د هـ و = مساحة سطح △ أ د جـ + ٣( مساحة سطح △ أ ب جـ

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{١٣} \times \sqrt{١٣} \times \text{جا}\,٦٠^{\circ} + ٣\left(\frac{١}{٢} \times ١ \times\right.$

$\left.٣ \times \text{جا}\ ١٢٠^{\circ}\right)$

$= \frac{١٣}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{٩}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \left(\frac{١٣}{٢} + \frac{٩}{٢}\right) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \left(\frac{٢٢}{٢}\right) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{١١\sqrt{٣}}{٢}$ سم$^{٢}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

**٦٠**

أوجد جميع الأزواج المرتبة ( س، ص ) التي تحقق المعادلة :

$$س^{٦} = ص^{٢} + ٥٣$$

حيث : س ، ص ∈ صـ

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –١٨ فبراير ١٩٩٨م]

∵ $س^{٦} = ص^{٢} + ٥٣$

∴ $س^{٦} - ص^{٢} = ٥٣$

∴ $( س^{٣} - ص)(س^{٣} + ص ) = ٥٣$

∴ الأقواس تأخذ الاحتمالات التالية :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $س^{٣} - ص = ٥٣$ | $س^{٣} - ص = ١$ | $س^{٣} - ص = -٥٣$ | $س^{٣} - ص = -١$ |
| $س^{٣} + ص = ١$ | $س^{٣} + ص = ٥٣$ | $س^{٣} + ص = -١$ | $س^{٣} + ص = -٥٣$ |
| بالجمع | بالجمع | بالجمع | بالجمع |
| $٢س^{٣} = ٥٤$ | $٢س^{٣} = ٥٤$ | $٢س^{٣} = -٥٤$ | $٢س^{٣} = -٥٤$ |
| $س^{٣} = ٢٧$ | $س^{٣} = ٢٧$ | $س^{٣} = -٢٧$ | $س^{٣} = -٢٧$ |
| $س = ٣$ | $س = ٣$ | $س = -٣$ | $س = -٣$ |
| ومنها : $ص = -٢٦$ | ومنها : $ص = ٢٦$ | ومنها : $ص = ٢٦$ | ومنها : $ص = -٢٦$ |

∴ الأزواج المرتبة هي :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ( ٣ ، – ٢٦ ) | ( ٣ ، ٢٦ ) | ( – ٣ ، ٢٦ ) | ( – ٣ ، – ٢٦ ) |

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٦١** أذكر الشرط الذي يجعل المستقيم الذي معادلته : س + ص = ك يمس الدائرة التي معادلتها : $س^٢ + ص^٢ = ن$ .

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ٢٠ فبراير ٢٠٠٢م]

∵ المستقيم: س + ص = ك يمس الدائرة: $س^٢ + ص^٢ = ن$

∴ ص = ك − س تحقق معادلة الدائرة

∴ $س^٢ + (ك - س)^٢ = ن$

∴ $س^٢ + ك^٢ - ٢ ك س + س^٢ = ن$

∴ $٢س^٢ - ٢ ك س + ك^٢ - ن = ٠$

∵ المماس يمس الدائرة في نقطة واحدة

∴ للمعادلة : $٢س^٢ - ٢ ك س + ك^٢ - ن = ٠$ حل وحيد

∴ مميز المعادلة السابقة والتي هي معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد = ٠

∵ في المعادلة السابقة : أ ( معامل $س^٢$ ) = ٢

ب ( معامل س ) = − ٢ ك

جـ ( الحد الخالي من س) = $ك^٢ - ن$

∴ $ب^٢ - ٤ أ جـ = ٠$

∴ $٤ ك^٢ - ٤ \times ٢ \times (ك^٢ - ن) = ٠$

∴ $٤ ك^٢ - ٨ (ك^٢ - ن) = ٠$

∴ $٤ ك^٢ - ٨ ك^٢ + ٨ ن = ٠$

∴ $٨ ن - ٤ ك^٢ = ٠$ بالقسمة على ٤

∴ $٢ ن - ك^٢ = ٠$

∴ الشرط هو : $٢ ن = ك^٢$

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paperb

**٦٢**

إذا كان : جا س + جتاس = $\sqrt{\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٢}}$ ، حيث : $\frac{ط}{٢}$ > س > ٠

فأوجد قيم س

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ١٩فبراير٢٠٠٣م]

بالتربيع : جا$^{٢}$س + ٢ جا س جتا س + جتا$^{٢}$س = $\frac{٢ + \sqrt{٣}}{٢}$

∴ ٢ جا س جتا س + (جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$س ) = ١ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ٢ جا س جتا س + ١ = ١ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ٢ جا س جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا ٢ س= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حيث : ط > ٢ س > ٠

∴ ٢ س = ٦٠°

∴ س = ٣٠°

أو : ٢ س = ١٢٠°

∴ س = ٦٠°

∴ س ∈ { ٣٠ ° ، ٦٠° }.

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٦٣**

**رجل يستطيع إنجاز عمل ما في ٩ أيام ، ويستطيع ابنه إنجاز نفس العمل في ١٦ يوم ، إذا كانا قد بدءا العمل سوياً ، وبعد ٤ أيام ترك الابن العمل ، وظل الأب يعمل وحيداً .**

**ما هو عدد الأيام الذي يحتاجها الأب لأداء العمل كله.**

**[ مسابقة ولاية – أوهايو الأمريكية –مارس ٢٠٠٥]**

ما ينجزه الأب من عمل خلال يوم واحد = $\frac{١}{٩}$ العمل الكلي

ما ينجزه الابن من عمل خلال يوم واحد = $\frac{١}{١٦}$ من العمل الكلي

ما ينجزه الأب والابن من عمل خلال يوم واحد = $\frac{١}{٩}+\frac{١}{١٦}=\frac{٢٥}{١٤٤}$ من العمل الكلي

ما تم إنجازه في ٤ أيام عمل = $٤\times\frac{٢٥}{١٤٤}=\frac{٢٥}{٣٦}$ من العمل الكلي

الباقي من العمل والذي يجب أن ينجزه الأب بعد أن غادر الابن العمل = $١-\frac{٢٥}{٣٦}=\frac{١١}{٣٦}$ من العمل الكلي

نفرض أن : س = عدد الأيام الزائدة التي يستغرقها الأب في إنجاز باقي العمل بعد مغادرة الابن

$\therefore \frac{س}{٩}=\frac{١١}{٣٦}$

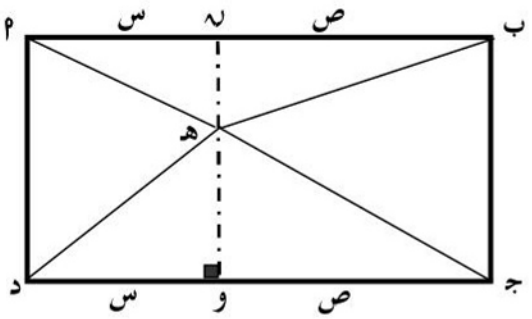
$\therefore$ س = $٩\times\frac{١١}{٣٦}=٣.٧٥$ يوم.

**٦٤**

**إذا رسمت النقطة هـ داخل المستطيل أ ب جـ د ، الذي فيه : |أ ب| = ٦سم ومساحة المثلث أ هـ ب = ٦سم$^{٢}$ ، ومساحة المثلث جـ هـ د = ١٢ سم$^{٢}$ .**

**أوجد : |هـ أ|$^{٢}$ − |هـ ب|$^{٢}$ + |هـ جـ|$^{٢}$ − |هـ د|$^{٢}$**

**[ المصدر : بطولة مدارس ستانفورد الأمريكية- مسابقة الهندسة – ٢٠٠١م]**




نصل: ب هـ ، جـ هـ ، أ هـ ، د هـ

نرسم : $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ ⊥ أ ب يقطع جـ د في و

∵ مساحة المثلث أ هـ ب = ٦سم$^{٢}$

، ∵ |أ ب| = ٦سم ، هـ ن ارتفاع في △ أ هـ ب

∴ |هـ ن| = $\frac{٢\times٦}{٦}$ = ٢سم

بالمثل |هـ و| (ارتفاع △ جـ هـ د ) = $\frac{٢\times١٢}{٦}$ = ٤ سم

نفرض أن |أ ن| = س ومنها |و د| = س

نفرض أن |ب ن| = ص ومنها |و جـ| = ص

∴ باستخدام نظرية فيثاغورث في المثلثات : ب ن هـ ، أ ن هـ ، جـ و هـ ، د و هـ .

|أ هـ|$^{٢}$ = س$^{٢}$ + ٤

|ب هـ|$^{٢}$ = ص$^{٢}$ + ٤

|هـ جـ|$^{٢}$ = ص$^{٢}$ +١٦

|د هـ|$^{٢}$ = س$^{٢}$ + ١٦

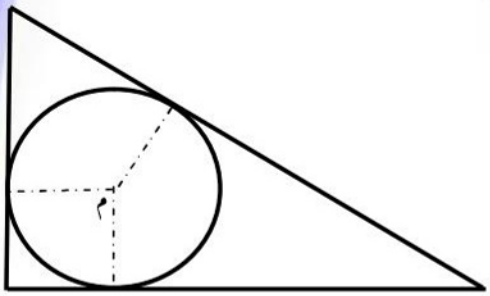
∴ |هـ أ|$^{٢}$ − |هـ ب|$^{٢}$ + |هـ جـ|$^{٢}$ − |هـ د|$^{٢}$ = س$^{٢}$ + ٤− ص$^{٢}$ − ٤ + ص$^{٢}$ +١٦− س$^{٢}$ − ١٦

= صفر

**٦٥** أوجد مساحة الدائرة المرسومة داخل المثلث الناتج من تقاطعات المستقيمات التي معادلاتها :-

**٤أ + ٣ ب = ٢٤ ، ٥٦ أ - ٣٣ ب = -٢٦٤ ، ٣ أ - ٤ ب = ١٨**

[ المصدر : بطولة مدارس ستانفورد الأمريكية - مسابقة الهندسة - ٢٠٠١م]




∵ ميل المستقيم : ٤أ + ٣ ب = ٢٤ يساوي $\frac{-٤}{٣}$

، ∵ ميل المستقيم : ٣ ا - ٤ ب = ١٨ يساوي $\frac{٣}{٤}$

، ∵ حاصل ضرب الميلين = -١

∴ المستقيمان متعامدان

وللحصول على نقطة تقاطع المستقيمان : ٤أ + ٣ ب = ٢٤ ، ٣ ا - ٤ ب = ١٨

من المعادلة : ٤أ + ٣ ب = ٢٤

ب = $\frac{١}{٣}$ ( ٢٤ - ٤ أ ) ----------(١)

ومن المعادلة : ٣ ا - ٤ ب = ١٨

ب = $\frac{١}{٤}$ ( ٣ أ - ١٨ ) ----------(٢)

من (١) ، (٢)

∴ $\frac{١}{٣}$ ( ٢٤ - ٤ أ ) = $\frac{١}{٤}$ ( ٣ أ - ١٨ )

∴ ٩٦ - ١٦ أ = ٩ أ - ٥٤

∴ ٢٥ أ = ١٢٠

∴ أ = ٦ ومنها ب = $\frac{٣\times٦-١٨}{٤}$ = ٠

∴ إحدى رؤوس المثلث = ( ٦ ، ٠ )

وبالمثل نحصل على الرأسين الباقيتين : وهما ( ٠ ، ٨ ) ، $\left(\frac{-٦٦}{٥}, \frac{-٧٢}{٥}\right)$

والآن نحصل على أطوال أضلاع المثلث من خلال قانون البعد بين نقطتين :

(المسافة بين نقطتين أ( س١، ص١) ، ب( س٢، ص٢) ل = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ )

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paper

الضلع الأول = $\sqrt{(٦ - ٠)^٢ + (٨ - ٠)^٢} = \sqrt{٣٦ + ٦٤} = ١٠$ سم

ويعتبر هذا الضلع هو ارتفاع المثلث أو ضلع القائمة الأول

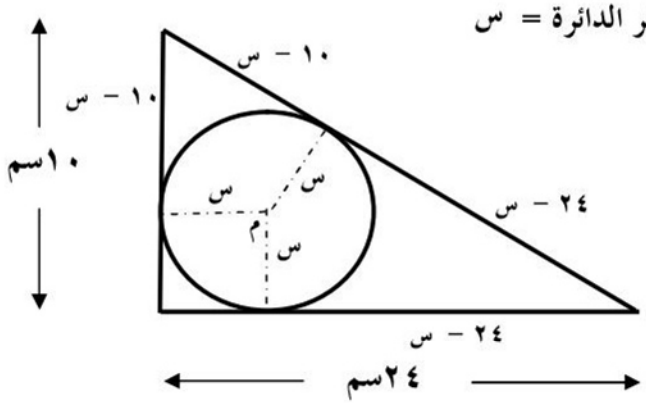
وبالمثل محصل على الضلع الثاني ( ضلع القائمة الثاني) = $\sqrt{\left(٦ + \frac{٦٦}{٥}\right)^٢ + \left(٠ + \frac{٧٢}{٥}\right)^٢}$

$= \sqrt{\left(\frac{٩٦}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٧٢}{٥}\right)^٢}$

$= \sqrt{\frac{١٤٤٠٠}{٢٥}} = ٢٤$ سم

∴ وتر المثلث من نظرية فيثاغورس = $\sqrt{(٢٤)^٢ + (١٠)^٢} = ٢٦$ سم

نفرض أن نصف قطر الدائرة = س




∴ من الرسم السابق : ( ١٠ - س ) + ( ٢٤ - س ) = ٢٦

∴ ٣٤ - ٢ س = ٢٦

∴ س = ٤ ( نصف قطر الدائرة )

∴ مساحة الدائرة = ١٦ ط سم$^٢$

**٦٦**

**الأشكال : △ ، □ ، ○ ، ⊙ تمثل أربعة أعداد مختلفة تقع بين العدد ١ والعدد ٩ ، استخدم المعادلات التالية للحصول على قيمة : ⊙**

△ + □ = ⊙

△ + △ = ○ + ○ + ○ + ○

△ + △ = ○ + ⊙

**[ المصدر : المسابقة العامة لولاية تكساس الأمريكية - ٢٠٠٥ م]**

نفرض أن : △ = س ، □ = ص ، ○ = ع ، ⊙ = ك

∴ س + ص = ك ----------(١)

، ٢ س = ٤ ع ----------(٢)

، ٢ س = ك + ع ----------(٣)

في المعادلة (٢)

∵ ٢ س = ٥ ع .

،∵ س ، ص أعداد صحيحة < ١٠ .

∴ للمعادلة (٢) حل وحيد هو : س = ٤ ، ع= ٢ .

بالتعويض في المعادلة (٣)

∴ ١٠ = ك + ٢. ، ومنها ك = ٦

بالتعويض في المعادلة (١)

∴ ٤ + ص = ٦

∴ ص =٢ .

**٦٧**

**إذا كانت : $س^{٢} - ٣س + ١ = ٠$**

**فأوجد القيمة العددية للمقدار : $س^{٩} + س^{٧} + س^{-٩} + س^{-٧}$**

**[ المصدر : المسابقة العامة لولاية تكساس الأمريكية – مسابقة الفرق – ٢٨ فبراير ٢٠٠٤ م]**

$\because س^{٢} - ٣س + ١ = ٠$

$\therefore س^{٢} + ١ = ٣س$ ( بالقسمة على س حيث $س \neq ٠$ )

$\therefore س + \frac{١}{س} = ٣$ ----------(١)

$س^{٩} + س^{٧} + س^{-٩} + س^{-٧} = (س^{٩} + س^{٧}) + (س^{-٧} + س^{-٩})$

$= س^{٨}(س + \frac{١}{س}) + س^{-٨}(س + \frac{١}{س})$

$= (س + \frac{١}{س})(س^{٨} + س^{-٨})$

$\therefore$ من المعادلة (١)

$س^{٩} + س^{٧} + س^{-٩} + س^{-٧} = ٣(س^{٨} + س^{-٨})$ ----------(٢)

بتربيع المقدار : $س + \frac{١}{س} = ٣$

$\therefore س^{٢} + س^{-٢} + ٢ = ٩$

$\therefore س^{٢} + س^{-٢} = ٧$ ( بالتربيع مرة ثانية)

$\therefore س^{٤} + س^{-٤} + ٢ = ٤٩$

$\therefore س^{٤} + س^{-٤} = ٤٧$ ( بالتربيع مرة ثالثاً)

$\therefore س^{٨} + س^{-٨} + ٢ = ٢٢٠٩$

$\therefore س^{٨} + س^{-٨} = ٢٢٠٧$ ----------(٣)

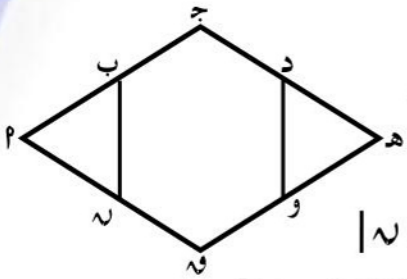
بالتعويض من (٢) في (٣)

$س^{٩} + س^{٧} + س^{-٩} + س^{-٧} = ٣ \times ٢٢٠٧ = ٦٦٢١$

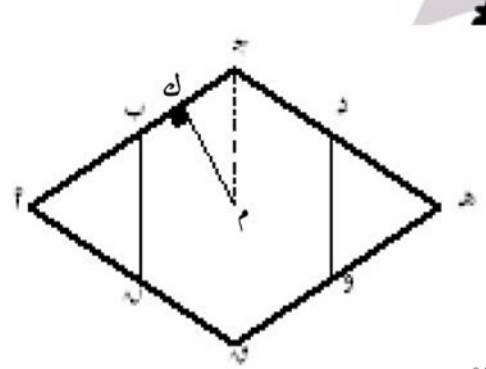
نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٦٨**

على الشكل : أ جـ هـ فـ متوازي أضلاع ،
ب جـ د و فـ ن سداسي منتظم
إذا كان : | جـ فـ| = ١٠ سم .أوجد : | أ ن|




[ المصدر : مسابقة مدينة فيرمونت الأمريكية للمدارس الثانوية-٣ مارس ٢٠٠٥]




نفرض أن : م مركز السداسي المنتظم ب جـ د و فـ ن

نرسم : م ك ⊥ ب ك

∵ | جـ فـ| = ١٠ سم

∴ | م جـ| ٥ سم

∵ زاوية رأس السداسي المنتظم = $\frac{(٦-٢)\times ١٨٠^\circ}{٦} = ١٢٠^\circ$

، ∵ م جـ ينصف ∠ جـ

∴ ∠ م جـ ب = ٦٠°

في △ م جـ ك القائم في ∠ ك نستطيع استنتاج أن ∠ جـ م ك = ٣٠°

∴ |جـ ك| ( الضلع المقابل للزاوية ٣٠° في المثلث القائم) = ٢,٥ سم

∴ | ب جـ| = ٥ سم.

أي أن طول ضلع السداسي المنتظم ب جـ د و فـ ن = ٥ سم

∵ ∠ أ ب ن = ∠ أ ن ب = ٦٠° ( مكملات لزوايا رأس السداسي المنتظم)

، ∵ △ أ ب ن متطابق الأضلاع

∴ | أ ن| = ٥ سم.

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

٦٩

أوجد في أبسط صورة قيمة: $٠,٤\overline{٧} - ٠,٤٧$

[ المصدر : بطولة مدارس ستانفورد الأمريكية- مسابقة الفرق – ٢٣ فبراير -٢٠٠٢م]

نفرض أن : $س = ٠,٤\overline{٧}$

$\therefore ١٠س = ٤,\overline{٧}$

$\therefore ١٠٠س = ٤٧,\overline{٧}$

بالطرح $\therefore$ $١٠٠ س - ١٠ س = ٤٧,\overline{٧} - ٤,\overline{٧} = ٤٣$

$\therefore س = \frac{٤٣}{٩٠}$

$$\therefore ٠,٤\overline{٧} - ٠,٤٧ = \frac{٤٣}{٩٠} - ٠,٤٧$$

$$= \frac{٤٣}{٩٠} - \frac{٤٧}{١٠٠}$$

$$= \frac{٤٣٠٠ - ٤٢٣٠}{٩٠٠٠}$$

$$= \frac{٧}{٩٠٠}.$$

.

**٧٠** أوجد أصغر عدد صحيح فردي ن يجعل حاصل الضرب التالي أكبر من ١٠٠٠ :-

$$٢^{\frac{١}{٧}} \times ٢^{\frac{٣}{٧}} \times ٢^{\frac{٥}{٧}} \times \ldots\ldots \times ٢^{\frac{١}{٧}(٢ن+١)}$$

[ المصدر : المسابقة الأمريكية الموحدة- مارس ١٩٧٦ م ]

∵ مجموع الأسس = $\frac{١}{٧} + \frac{٣}{٧} + \frac{٥}{٧} + \ldots\ldots\ldots + \frac{١}{٧}(٢ن+١)$

$= \frac{١}{٧}\left[ ١ + ٣ + ٥ + \ldots\ldots\ldots\ldots + (٢ن + ١) \right]$

نفرض أن عدد حدود المتتابعة : ١ ، ٣ ، ٥ ، ..... ، (٢ن + ١) يساوي م

∵ $ح_{ن}$ = الحد الأول في المتتابعة + ( عدد حدود المتتابعة − ١) الأساس

، ∵ الحد العام للمتتابعة $ح_{ن}$ = الحد الأخير

∴ الحد الأخير للمتتابعة = الحد الأول في المتتابعة + ( عدد حدود المتتابعة − ١) الأساس

∴ ٢ن + ١ = ١ + ( م − ١ ) × ٢

∴ ٢ن + ١ = ١ + ٢م −٢

∴ ٢ن = ٢م − ٢ بالقسمة على ٢

∴ م = ن + ١

∵ مجموع حدود المتتابعة = $\frac{١}{٢}$عدد حدود المتتابعة [ ٢ × الحد الأول + ( عدد حدود المتتابعة − ١ ) الأساس]

∴ مجموع حدود المتتابعة = $\frac{١}{٢}$( ن + ١ ) [ ٢ × ١ + ( ن + ١ − ١ ) × ٢ ]

$= \frac{١}{٢}$( ن + ١ ) [ ٢ + ٢ن ]

$= \frac{١}{٢}$( ن + ١ ) × ٢ ( ن + ١ )

= ( ن + ١ )( ن + ١ )

$= ( ن + ١ )^{٢}$

∴ مجموع الأسس = $\frac{١}{٧}( ن + ١ )^{٢}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

$\therefore\ ٢^{\frac{١}{٧}(ن+١)^{٢}} > ١٠٠٠$

بأخذ لوغاريتم الطرفين

$لو\ ٢^{\frac{١}{٧}(ن+١)^{٢}} > لو\ ١٠^{٣}$

$\frac{١}{٧}(ن+١)^{٢}\ لو\ ٢ > ٣$

$(ن+١)^{٢}\ لو\ ٢ > ٣ \times ٧$

$(ن+١)^{٢} > ٢١ \div لو\ ٢$ باستخدام الحاسبة لإيجاد لو ٢

$(ن+١)^{٢} > ٢١ \div ٠,٣٠١$

$(ن+١)^{٢} > ٦٩$

من الممكن من العلاقة السابقة استنتاج العلاقة:

$(ن+١)^{٢} > ٨^{٢}$

$\therefore\ ن+١ > ٨$

$\therefore\ ن > ٧$

ن = ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١، .....

∴ أصغر عدد فردي يحقق المتباينة هو : ن = ٩

**٧١**

**إذا كان : جـ عدداً حقيقياً وكان المعكوس الجمعي لأحد جذري المعادلة (س$^{٢}$ − ٣ س + جـ = ٠ ) هو حل للمعادلة (س$^{٢}$ + ٣ س − جـ = ٠ ) .**
**فأوجد جذري المعادلة : س$^{٢}$ − ٣ س + جـ = ٠**

**[ المصدر : المسابقة الأمريكية الموحدة- مارس ١٩٧٦ م ]**

∵ المعكوس الجمعي لأحد جذري المعادلة (س$^{٢}$ − ٣ س + جـ = ٠ ) هو حل للمعادلة (س$^{٢}$ + ٣ س − جـ = ٠ )

وبفرض أن أحد جذري المعادلة الأولى = م

∴ م ، − م هما على الترتيب جذران للمعادلتين: (س$^{٢}$ − ٣ س + جـ = ٠ ) ، (س$^{٢}$ + ٣ س − جـ = ٠ )

∴ م$^{٢}$ − ٣ م + جـ = ٠ ، م$^{٢}$ + ٣ م − جـ = ٠

بالجمع ∴ ٢ م$^{٢}$ = ٠

∴ م = ٠ ، ومنها جـ = ٠

∴ بالتعويض عن قيمة جـ في المعادلة : س$^{٢}$ − ٣ س + جـ = ٠

∴ س$^{٢}$ − ٣ س = ٠

∴ س ( س − ٣) = ٠

∴ س = ٠ ، ٣

∴ جذرا المعادلة : { ٠ ، ٣ }.

**٧٢**

**ما هو عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين عشرة ومائة ، والتي كل منها إذا كتب في النظام العشري ، يزداد بمقدار تسعة ، عند عكس وضع رقميه؟**

**[ المصدر : المسابقة الأمريكية الموحدة- مارس ١٩٧٦ م ]**

نفرض أن رقم الآحاد = س ، رقم العشرات = ص

∴ ( ص + ١٠ س ) − ( س + ١٠ ص ) = ٩

∴ ص + ١٠ س − س − ١٠ ص = ٩

∴ ٩ س − ٩ ص = ٩ بالقسمة على ٩

∴ س − ص = ١

∴ رقم الآحاد يزيد واحداً عن رقم العشرات

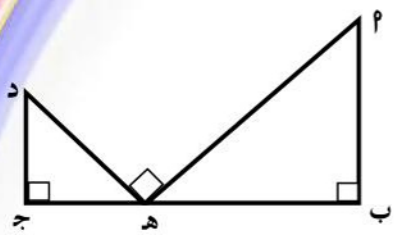
∴ الأعداد هي : { ١٢ ، ٢٣ ، ٣٤ ، ٤٥ ، ٥٦ ، ٦٧ ، ٧٨ ، ٨٩ }

∴ عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين عشرة ومائة ، والتي كل منها إذا كتب في النظام العشري ، يزداد بمقدار تسعة ، عند عكس وضع رقميه = ٨ أعداد .

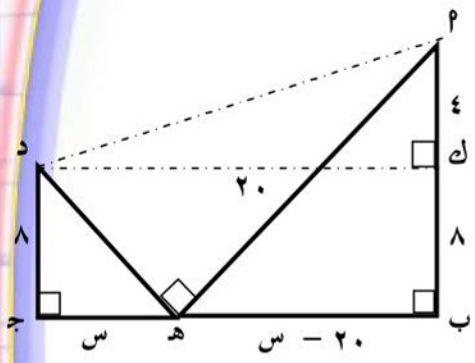
نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

**٧٣**

على الشكل : | أ ب| = ١٢ سم ،
| ب جـ| = ٢٠ سم ، | جـ د| = ٨ سم
أوجد : | هـ جـ|.




[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية – ١٩فبراير٢٠٠٣م]




نرسم : د ك ⊥ أ ب ، نصل أ د ، نفرض أن : | هـ جـ| = س

∴ | ب هـ| = ٢٠ – س

من السهل إثبات أن الشكل ك ب جـ د مستطيل

∴ | ك ب| = ٨ سم ، | ك د| = ٢٠سم ومنها | أ ك| = ٤ سم

∴ في △ أ ك د القائم في ∠ ك

| أ د|$^{٢}$ = (٢٠)$^{٢}$ + (٤)$^{٢}$

∴ | أ د|$^{٢}$ = ٤٠٠ + ١٦ = ٤١٦

في △ أ هـ د القائم في ∠ هـ

| أ د|$^{٢}$ = | أ هـ|$^{٢}$ + | هـ د|$^{٢}$

∴ ٤١٦ = | أ هـ|$^{٢}$ + | هـ د|$^{٢}$ ----------(١)

في △ أ ب هـ القائم في ∠ ب

| أ هـ|$^{٢}$ = (١٢)$^{٢}$ + ( ٢٠ – س )$^{٢}$ ----------(٢)

في △ د هـ جـ القائم في ∠ جـ

| هـ د|$^{٢}$ = (٨)$^{٢}$ + س$^{٢}$ ----------(٣)

بالتعويض (٢) ، (٣) في (١)

∴ ٤١٦ = (١٢)$^{٢}$ + ( ٢٠ – س )$^{٢}$ + (٨)$^{٢}$ + س$^{٢}$

∴ ٤١٦ = ١٤٤ + ٤٠٠ – ٤٠س + س$^{٢}$ + ٦٤ + س$^{٢}$

∴ ٢ س$^{٢}$ = ٦٠٨ – ٤١٦ – ٤٠ س

∴ ٢ س$^{٢}$ + ٤٠ س + ١٩٢ = ٠ بالقسمة على ٢

∴ س$^{٢}$ + ٢٠ س + ٩٦ = ٠

∴ ( س – ١٢) ( س – ٨) = ٠

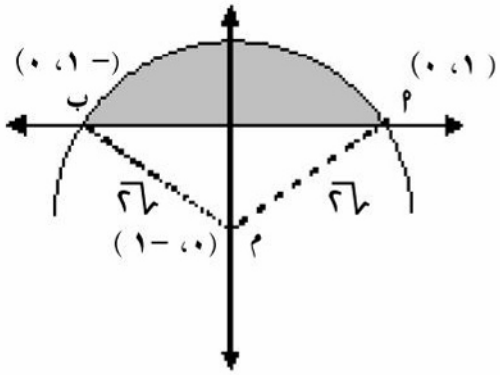
∴ س = ١٢ أو ٨

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paperb

٧٤

أوجد المساحة الواقعة أعلى محور السينات ، وأسفل المنحنى

$$س^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢$$




المحنى الذي معادلته : $س^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٢$

يمثل دائرة نصف قطرها $\sqrt{٢}$ ومركزها ( ٠ ، −١)

وللحصول على نقطتي تقاطع الدائرة مع محور السينات

نضع ص = ٠ في معادلة الدائرة

$\therefore س^{٢} + (٠ + ١)^{٢} = ٢$

$\therefore س^{٢} + ١ = ٢$

$\therefore س^{٢} = ١$

ومنها س = ± ١

∴ نقطتي تقاطع الدائرة مع محور السينات : أ( ١ ، ٠ ) ، ب( − ١ ، ٠ )

$\therefore |أ ب| = \sqrt{(١ + ١)^{٢} + (٠ - ٠)^{٢}} = \sqrt{٢^{٢}} = ٢$

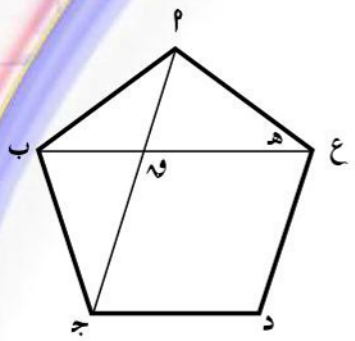
∴ △ أ ب م قائم الزاوية في م ( $|أ ب|^{٢} = |أ م|^{٢} + |ب م|^{٢}$ ) عكس نظرية فيثاغورس

∴ مساحة القطاع الدائري أ م ب يمثل ربع مساحة الدائرة = $\frac{١}{٤}$ ط نق$^{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ ط × $(\sqrt{٢})^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ط

∴ مساحة △ أ م ب = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}$ = ١

∴ مساحة المنطقة المظللة = $\frac{١}{٢}$ط − ١

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paper



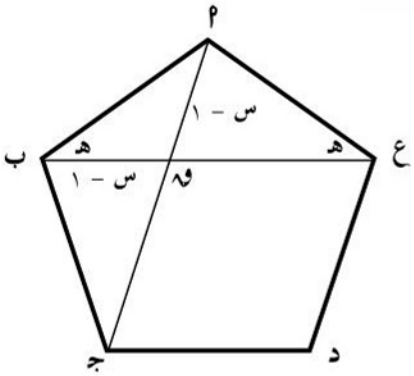

**٧٥**

على الشكل : أ ب جـ د ع

خماسي منتظم طول ضلعه ١ سم .

إذا كان : | ع ب| = س ،

قياس ∠ أ ع ب = هـ ، أوجد : | س| ، جتا هـ




∵ ع ب // د جـ ، أ جـ // ع د ، | ع د| = | د جـ| = ١

∴ الشكل : ع د جـ ق معين

∴ | ع د| = | د جـ| = | جـ ق| = | ق ع| = ١

∵| ع ب| = س

∴ | أ ق| = | ق ب| = س − ١

∴ △ أ ق ب متطابق الضلعين

، وفي △ أ ع ب ∵ | أ ع| = | أ ب|

∴ ∠ أ ع ب = ∠ أ ب ع = هـ

∴ △ △ ع أ ب ، أ ق ب

∵ ∠ أ ع ب = ∠ ب أ ق ، ∠ أ ب ق = ∠ أ ب ع

∴ △ △ يتشابهان وينتج أن : $\frac{\text{ع أ}}{\text{أ ق}}$ =

∴ $\frac{\text{س}}{١} = \frac{١}{\text{س} - ١}$

∴ س$^{٢}$ − س = ١

∴ س$^{٢}$ − س − ١ = ٠ ------- (١) باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية

∴ س = $\frac{١}{٢}$ (١ − $\sqrt{٥}$ )

باستخدام قانون جيب التمام في △ أ ق ع

∴ | أ ق|$^{٢}$ = | أ ع|$^{٢}$ + | ق ع|$^{٢}$ − ٢ | أ ع| × | ق ع| جتا هـ

∴ ( س − ١)$^{٢}$ = ١ + ١ − ٢ × ١ × ١ × جتا هـ

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paper

$\therefore (\text{س} - ١)^{٢} = ٢ - ٢ \text{ جتا هـ}$

$\therefore ٢ \text{ جتا هـ} = ٢ - (\text{س} - ١)^{٢}$

$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{١}{٢} \left[ ٢ - (\text{س} - ١)^{٢} \right]$

$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{١}{٢} \left[ ٢ - \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١ \right]$

من (١) : $\text{س}^{٢} = \text{س} + ١$

$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{١}{٢} \left[ ٢ - (\text{س} + ١) + ٢\text{س} - ١ \right]$

$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{١}{٢} \left[ ٢ - \text{س} - ١ + ٢\text{س} - ١ \right]$

$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{١}{٢} \text{س}$

$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{١}{٢} \left[ \frac{١}{٢} (١ - \sqrt{٥}) \right]$

$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{١}{٤} (١ - \sqrt{٥})$ .

٧٦

١) أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty}$ س ( $\sqrt{س^٢ + ١}$ − س)

٢) أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty} \left\{ ٣^{س} + ٣^{٢س} \right\}^{\frac{١}{س}}$

٣) أوجد $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{س^٢ ( جا س + جتا^٣ س)}{(س^٢ + ١)(س - ٣)}$

١) أوجد : $\lim\limits_{س \to \infty}$ س ( $\sqrt{س^٢ + ١}$ − س)

س ( $\sqrt{س^٢ + ١}$ − س) × $\dfrac{\sqrt{س^٢ + ١} + س}{\sqrt{س^٢ + ١} + س}$ بالضرب في المرافق

$\therefore = \dfrac{س \left[ (\sqrt{س^٢ + ١})^٢ - (س)^٢ \right]}{\sqrt{س^٢ + ١} + س} = \dfrac{س \left[ س^٢ + ١ - (س)^٢ \right]}{\sqrt{س^٢ + ١} + س}$

$= \dfrac{س}{\sqrt{س^٢ + ١} + س}$

بالقسمة على س

$= \dfrac{١}{\sqrt{١ + \frac{١}{س^٢}} + ١}$

$\therefore \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{١}{\sqrt{١ + \frac{١}{س^٢}} + ١} = \dfrac{١}{\sqrt{١ + ٠} + ١} = \dfrac{١}{٢}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

٢) أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left\{ ٣^{\text{س}} + ٣^{٢\text{س}} \right\}^{\frac{١}{\text{س}}}$

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left\{ ٣^{\text{س}} + ٣^{٢\text{س}} \right\}^{\frac{١}{\text{س}}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \left\{ ٣^{\text{س}} + ٩^{\text{س}} \right\}^{\frac{١}{\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \left\{ ٩^{\text{س}} \left\{ \frac{٣^{\text{س}}}{٩^{\text{س}}} + \frac{٩^{\text{س}}}{٩^{\text{س}}} \right\} \right\}^{\frac{١}{\text{س}}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \left\{ ٩^{\text{س}} \left\{ \left(\frac{٣}{٩}\right)^{\text{س}} + ١ \right\} \right\}^{\frac{١}{\text{س}}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \left\{ ٩^{\text{س}} \left\{ \left(\frac{١}{٣}\right)^{\text{س}} + ١ \right\} \right\}^{\frac{١}{\text{س}}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \left\{ \left\{ ٩^{\text{س}} \right\}^{\frac{١}{\text{س}}} \left\{ \left(\frac{١}{٣}\right)^{\text{س}} + ١ \right\}^{\frac{١}{\text{س}}} \right\}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \left\{ \left\{ ٩ \right\} \left\{ \left(\frac{١}{٣}\right)^{\text{س}} + ١ \right\}^{\frac{١}{\text{س}}} \right\} = ٩$$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} \dfrac{\text{س}^{٢} ( \text{جا س} + \text{جتا}^{٣}\text{س})}{(\text{س}^{٢} + ١)(\text{س} - ٣)}$

قبل الحل علينا أن نتذكر أن :

$١ \geqslant \text{جا س} \geqslant -١$

، $١ \geqslant \text{جتا س} \geqslant -١$

ومنها: $١ \geqslant \text{جتا}^{٣}\text{س} \geqslant -١$

$\therefore ٢ \geqslant \text{جتا}^{٣}\text{س} + \text{جا س} \geqslant -٢$

بالقسمة على : ( س − ٣ )

$$\therefore \frac{٢}{\text{س} - ٣} \leq \frac{\text{جا س} + \text{جتا}^{٣}\text{س}}{(\text{س} - ٣)} \geq \frac{-٢}{\text{س} - ٣}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

وبالقسمة على : $س^٢ + ١$ والضرب في $س^٢$

$$\therefore \frac{٢س^٢}{(س^٢+١)(س-٣)} \leqslant \frac{س^٢(جا\ س + جتا^٣س)}{(س^٢+١)(س-٣)} \leqslant \frac{-٢س^٢}{(س^٢+١)(س-٣)}$$

$$\therefore \lim_{س \to -\infty} \frac{٢س^٢}{(س^٢+١)(س-٣)} = \lim_{س \to -\infty} \frac{٢س^٢}{س^٣ - ٣س^٢ + س - ٣}$$

بالقسمة على : $س^٣$

$$\therefore \lim_{س \to -\infty} = \frac{\frac{٢}{س}}{\frac{٣}{س^٣} - \frac{١}{س^٢} + \frac{٣}{س} - ١} = \frac{٠}{٠-٠+٠-١} = ٠$$

بالمثل : $\lim_{س \to -\infty} \frac{-٢س^٢}{(س^٢+١)(س-٣)} = ٠$

$$\therefore \lim_{س \to -\infty} \frac{س^٢(جا\ س + جتا^٣س)}{(س^٢+١)(س-٣)} = ٠$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

**٧٧**

انطق مقام الكسر : $\dfrac{١}{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٦}}$

[ مسابقة مقاطعة نيو فاوند لاند الكندية –٢٠ فبراير ٢٠٠٢ م]

$$\frac{١}{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}+\sqrt{٦}} = \frac{١}{(\sqrt{٢}+\sqrt{٣})+\sqrt{٦}} \times \frac{(\sqrt{٢}+\sqrt{٣})-\sqrt{٦}}{(\sqrt{٢}+\sqrt{٣})-\sqrt{٦}}$$

$$= \frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}-\sqrt{٦}}{(\sqrt{٢}+\sqrt{٣})^{٢}-٦} = \frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}-\sqrt{٦}}{٥+٢\sqrt{٦}-٦} = \frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}-\sqrt{٦}}{٢\sqrt{٦}-١}$$

$$= \frac{\sqrt{٢}+\sqrt{٣}-\sqrt{٦}}{٢\sqrt{٦}-١} \times \frac{٢\sqrt{٦}+١}{٢\sqrt{٦}+١}$$

$$= \frac{(\sqrt{٢}+\sqrt{٣}-\sqrt{٦})(٢\sqrt{٦}+١)}{٢٣}$$

$$= \frac{٢\sqrt{١٢}+\sqrt{٢}+٢\sqrt{١٨}+\sqrt{٣}-١٢-\sqrt{٦}}{٢٣}$$

$$= \frac{٤\sqrt{٣}+\sqrt{٢}+٦\sqrt{٢}+\sqrt{٣}-١٢-\sqrt{٦}}{٢٣}$$

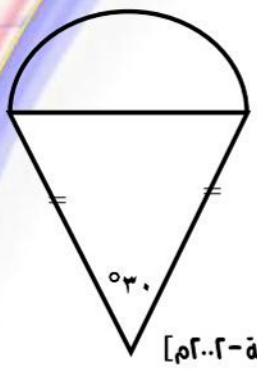
$$= \frac{٧\sqrt{٢}+٥\sqrt{٣}-\sqrt{٦}-١٢}{٢٣}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

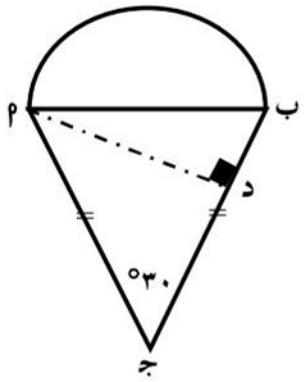
**٧٨**

على الشكل المجاور : نصف دائرة قطرها عبارة عن قاعدة مثلث متطابق الضلعين طول كل منهما ٢ سم والزاوية بينهما = ٣٠°

أوجد النسبة بين مساحة الدائرة ومساحة المثلث.




[ دوري الرياضيات مدينة نيو إنجلاند الأمريكية – مسابقة الهندسة-٢٠٠٢م]




نفرض أن : |أ ج| = |ب ج| = ٢

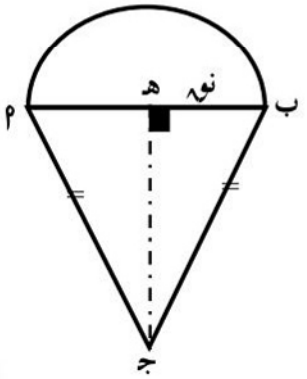
نرسم : أ د ⊥ ب ج

∵ أ د مقابل للزاوية ٣٠° في △ القائم أ د ج

∴ |أ د| = ١

∴ مساحة سطح △ أ ب ج = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ سم$^{٢}$

نرسم : ج هـ ⊥ أ ب والذي ينصف ∠ ج




∴ جا ١٥° = $\frac{١}{٢}$ نو

∴ ٢ جا ١٥° = نو

∴ ٢جا (٦٠° - ٤٥°) = نو

∴ ٢ [ جا ٦٠ ° جتا ٤٥° – جتا ٦٠ ° جا ٤٥°] = نو

∴ ٢ [ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ – $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ] = نو

∴ ٢ [ $\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}$ – $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ] = نو

∴ نو = [ $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ – $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ] = $\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٢}$

∴ مساحة نصف الدائرة = $\frac{١}{٢}$ ط $\left(\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٢}\right)^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$( ٢ – $\sqrt{٣}$ ) ط

∴ النسبة = $\frac{١}{٢}$( ٢ – $\sqrt{٣}$ ) ط حيث مساحة △ أ ب ج = ١

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

٧٩

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يلي:-

١) ص = ٣ ظا $\sqrt{\text{س}}$.

٢) ص = جتا$^{٢}$ ( س$^{٣}$).

٣) ص = س$^{٢}$ جا$^{٣}$(٥ س).

[ مسابقة معهد ECC للعلوم الرياضية -٩ ابريل ٢٠٠٥ م]

١) ص = ٣ ظا $\sqrt{\text{س}}$.

ص = ٣ ظا س$^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ ( قا$^{٢}$ $\sqrt{\text{س}}$ ) × $\frac{١}{٢}$ س$^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٣قا}^{٢}\sqrt{\text{س}}}{\text{٢}\sqrt{\text{س}}}$

٢) ص = جتا$^{٢}$ ( س$^{٣}$).

ص = (جتا ( س$^{٣}$))$^{٢}$.

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ (جتا ( س$^{٣}$)) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جتا ( س$^{٣}$)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ (جتا ( س$^{٣}$)) × (-جا ( س$^{٣}$) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ( س$^{٣}$)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ (جتا ( س$^{٣}$)) × (-جا ( س$^{٣}$) ×٣ س$^{٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ =- ٦س$^{٢}$جتا ( س$^{٣}$) × جا ( س$^{٣}$)

٣) ص = س$^{٢}$ جا$^{٣}$(٥ س).

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س$^{٢}$ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ( جا$^{٣}$(٥ س)) + $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ( س$^{٢}$) جا$^{٣}$(٥ س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س$^{٢}$(٣ جا$^{٢}$(٥ س)) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ جا(٥ س) + ٢ س جا$^{٣}$(٥ س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ س$^{٢}$جا$^{٢}$(٥ س) جتا(٥ س) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (٥ س)+ ٢ س جا$^{٣}$(٥ س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ س$^{٢}$جا$^{٢}$(٥ س) جتا(٥ س) (٥)+ ٢ س جا$^{٣}$(٥ س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١٥ س$^{٢}$جا$^{٢}$(٥ س) جتا(٥ س) + ٢ س جا$^{٣}$(٥ س)

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س جا$^{٢}$(٥ س){ ١٥ س جتا(٥ س) + ٢ جا(٥ س)}

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

**٨٠**

**حل المعادلة :**

$(س^{٢} - ١)^{٢} = ٤س + ١$ حيث س ∈ الأعداد الحقيقية

**[ مسابقة معهد UAB للرياضيات – ٢٠٠٥ م]**

$(س^{٢} - ١)^{٢} = ٤س + ١$

$س^{٤} - ٢س^{٢} + ١ = ٤س + ١$

$س^{٤} - ٢س^{٢} - ٤س = ٠$

$س(س^{٣} - ٢س - ٤) = ٠$

$س[(س^{٣} - ٨) - ٢س + ٤] = ٠$

$س[(س^{٣} - ٨) - ٢(س - ٢)] = ٠$

$س[(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤) - ٢(س - ٢)] = ٠$

$س[(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤ - ٢)] = ٠$

$س(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤ - ٢) = ٠$

∴ جذور المعادلة :-

$س = ٠$ ، $س = ٢$

**٨١**

على الشكل المجاور :

أ ب جـ △ فيه س ص // ب جـ ،

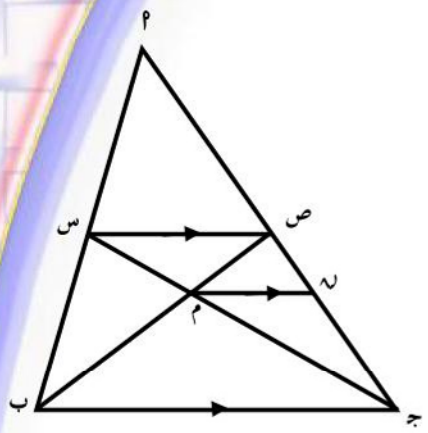
رسم س جـ يقطع ص ب في م ،

رسم $\overleftarrow{\text{م ن}}$ // ب جـ ويقطع أ ب في ن

إذا كان :

| جـ ن| = ٢ سم ، |ن ص| = ١ سم

فأوجد : |أ جـ|




[ المصدر : مسابقة ولاية وسكنسون الأمريكية– النصفية الثانية – نوفمبر ٢٠٠٤م]

∵ ن م // جـ ب

∴ △ ص ن م يشابه △ ص جـ ب

∴ $\frac{\text{ص م}}{\text{ص ب}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ص جـ}} = \frac{١}{٣}$

، $\frac{\text{ص م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ص ن}}{\text{ن جـ}} = \frac{١}{٢}$

∵ س ص // ب جـ

∴ △ م ص س يشابه △ م ب جـ

∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{ص م}}{\text{م ب}} = \frac{١}{٢}$

وكذلك △ أ س ص يشابه △ أ ب جـ

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}} = \frac{١}{٢}$

∴ أ جـ = ٢ أ ص ومنها ص منتصف أ جـ

∴ أ ص = ص جـ = ٣ سم

∴ |أ جـ| = ٦ سم .

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

## ٨٢

احسب التكاملات التالية :-

١) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt{س+3}}\ ء س$

٢) $\int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{س}}}}\ ء س$

[ مسابقة معهد ECC للعلوم الرياضية -٩ ابريل ٢٠٠٥ م]

١) $\int \sqrt[3]{1+\sqrt{س+3}}\ ء س$

نفرض أن : $ص^3 = 1 + \sqrt{س+3}$

$\therefore\ ص = \sqrt[3]{1 + \sqrt{س+3}}$

، $\therefore\ ص^3 - 1 = \sqrt{س+3}$

$\therefore\ س = (ص^3 - 1)^2 + 3$

$\therefore\ س' = 2\ (ص^3 - 1)(3\ ص^2)\ \ ء ص = (6\ ص^5 - 6\ ص^2)\ ء ص$

$\therefore \int \sqrt[3]{1+\sqrt{س+3}}\ ء س = \int (ص)(6\ ص^5 - 6\ ص^2)\ ء ص$

$\therefore \int (6\ ص^6 - 6\ ص^3)\ ء ص = 6\ \frac{ص^7}{7} - 6\ \frac{ص^4}{4} + ث$

$= \frac{6}{7}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{س+3}}\right)^7 - \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{س+3}}\right)^4 + ث$

$= \frac{6}{7}\left(1 + \sqrt{س+3}\right)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}\left(1 + \sqrt{س+3}\right)^{\frac{4}{3}} + ث$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

٢) $\int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{س}}}}\, ء س$

نفرض أن : $ص^2 = 2 + \sqrt{1+\sqrt{س}}$

$\therefore ص = \sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{س}}}$

، $\therefore ص^2 - 2 = \sqrt{1+\sqrt{س}}$

بالتربيع $\therefore (ص^2 - 2)^2 = 1 + \sqrt{س}$ $\quad \therefore \sqrt{س} = (ص^2 - 2)^2 - 1$

بالتربيع $\therefore س = ((ص^2 - 2)^2 - 1)^2$

$\therefore س' = 2((ص^2 - 2)^2 - 1) \times 2(ص^2 - 2)(2ص)\ ء ص$

$= 8ص(ص^2 - 2)(ص^4 - 4ص^2 + 3)\ ء ص$

$= (8ص^7 - 48ص^5 + 88ص^3 - 48ص)\ ء ص$

$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{س}}}}\, ء س = \int \frac{1}{ص}(8ص^7 - 48ص^5 + 88ص^3 - 48ص)\ ء ص$

$= \int (8ص^6 - 48ص^4 + 88ص^2 - 48)\ ء ص$

$= 8\frac{ص^7}{7} - 48\frac{ص^5}{5} + 88\frac{ص^3}{3} - 48ص + ث$

$= \frac{8}{7}(\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{س}}})^7 - \frac{48}{5}(\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{س}}})^5 + \frac{88}{3}(\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{س}}})^3$

$- 48(\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{س}}}) + ث$

$= \frac{8}{7}(2+\sqrt{1+\sqrt{س}})^{\frac{7}{2}} - \frac{48}{5}(2+\sqrt{1+\sqrt{س}})^{\frac{5}{2}} + \frac{88}{3}(2+\sqrt{1+\sqrt{س}})^{\frac{3}{2}}$

$- 48(2+\sqrt{1+\sqrt{س}})^{\frac{1}{2}} + ث$

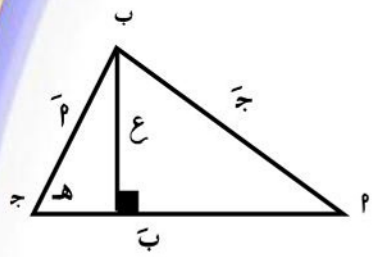
نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

# دليل معلم الرياضيات

## الجزء الأول

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

## مثلث ارتفاعه ع وقاعدته ب




المساحة = $\frac{١}{٢}$ بَ ع

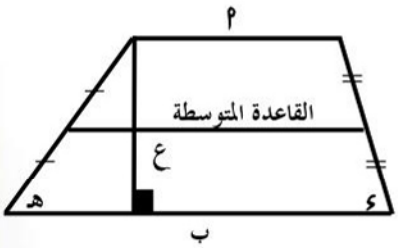
= أَ بَ جا هـ

= $\sqrt{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أَ})(\text{ح} - \text{بَ})(\text{ح} - \text{جَ})}$

حيث ح = $\frac{١}{٢}$ ( أَ + بَ + جَ )

المحيط = أَ + بَ + جَ

## شبه منحرف ارتفاعه ع وطولي قاعدته أ ، ب



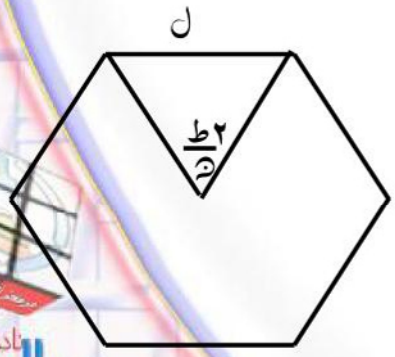

المساحة = $\frac{١}{٢}$ ع ( أ + ب )

= ع × القاعدة المتوسطة

المحيط = أ + ب + ع ( $\frac{١}{\text{جاهـ}}$ + $\frac{١}{\text{جاء}}$ )

= أ + ب + ع ( قتا هـ + قتا ء )

## مضلع منتظم عدد أضلاعه ن ، وطول كل منها ل



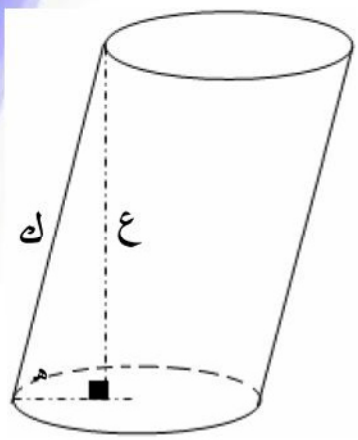

المساحة = $\frac{١}{٤}$ ن ل$^{٢}$ ظتا $\frac{ط}{ن}$

= $\frac{١}{٤}$ ن ل$^{٢}$ $\frac{\text{جتا } \frac{ط}{ن}}{\text{جا } \frac{ط}{ن}}$

المحيط = ن ل

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

## اسطوانية دائرية مائلة نق قطرها نق وارتفاعها وطول راسمها ك




الحجم = ط نق$^{٢}$ ع

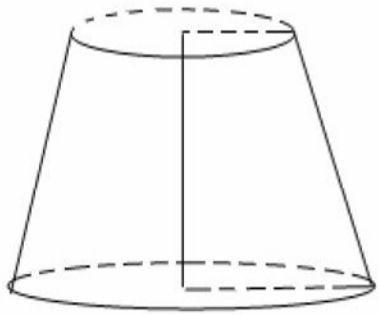
= ط نق$^{٢}$ ك جا هـ

المساحة الجانبية = ٢ ط نق ك

= $\frac{\text{٢ ط نق ع}}{\text{جا هـ}}$

= ٢ ط نق ع قتا هـ

## مخروط دائري قائم ناقص قطري قاعدتيه أ، ب وارتفاعه ع



الحجم = $\frac{١}{٣}$ ط ع ( أ$^{٢}$ + أ ب + ب$^{٢}$ )

المساحة الجانبية = ط ( أ + ب ) $\sqrt{\text{ع}^{٢} + (\text{ب} - \text{أ})^{٢}}$

= ط ( أ + ب ) ك

## النسب المثلثية لضعف ومضاعفات الزاوية

- جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا
- جا ٣ أ = ٣ جا أ − ٤ جا$^{٣}$ أ
- جتا ٣ أ = ٤ جتا$^{٣}$ أ − ٣ جتا أ
- ظا ٢ أ = $\frac{\text{٢ ظا أ}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{أ}}$
- جتا ٢ أ = { جتا$^{٢}$ أ − جا$^{٢}$ أ ، ١ − ٢ جا$^{٢}$ أ ، ٢ جتا$^{٢}$ أ − ١ }
- ظا ٣ أ = $\frac{\text{٣ ظا أ − ظا}^{٣}\text{أ}}{\text{١ − ٣ ظا}^{٢}\text{أ}}$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paperb

## مساحة مثلث إحداثيات رؤوسه ( س١، ص١)، ( س٢، ص٢)، ( س٣، ص٣).

$$\text{المساحة} = \pm \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} س_١ & س_٢ & س_٣ \\ ص_١ & ص_٢ & ص_٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \pm \frac{١}{٢} ( س_١ ص_٢ + ص_١ س_٣ + ص_٣ س_٢ - ص_٢ س_٣ - ص_١ س_٢ - س_١ ص_٣).$$

مساحة المثلث دائماً موجبة.

إذا كانت المساحة = صفراً فإن النقط الثلاثة تكون على استقامة واحدة

## العلاقة بين أضلاع المثلث وزواياه

أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه أَ ، بَ ، جَ وزواياه أ، ب ، جـ

قاعدة الجيب : $\frac{أَ}{جا\ أ} = \frac{بَ}{جا\ ب} = \frac{جَ}{جا\ جـ}$

قاعدة ظل نصف الزاوية : $ظا \frac{١}{٢} (أ - ب) = \frac{أَ - بَ}{أَ + بَ} \times ظا \frac{١}{٢} (أ - ب)$.

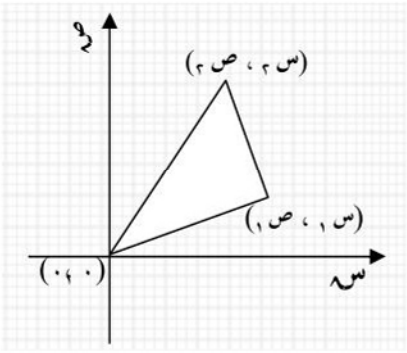
قاعدة جيب التمام : $جتا\ أ = \frac{بَ^٢ + جَ^٢ - أَ^٢}{٢\ بَ\ جَ}$

$$جتا\ ب = \frac{أَ^٢ + جَ^٢ - بَ^٢}{٢\ أَ\ جَ}$$

$$جتا\ جـ = \frac{أَ^٢ + بَ^٢ - جَ^٢}{٢\ بَ\ جَ}$$

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

## مساحة المثلث الذي أحد رؤوسه ( ٠ ، ٠ )




$$\text{المساحة} = \pm \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} س_١ & س_٢ \\ ص_١ & ص_٢ \end{vmatrix}$$

## الزاوية هـ بين المستقيمين اللذين ميلاهما م١ ، م٢

$$\text{ظا هـ} = \frac{م_٢ - م_١}{١ + م_١ م_٢}$$

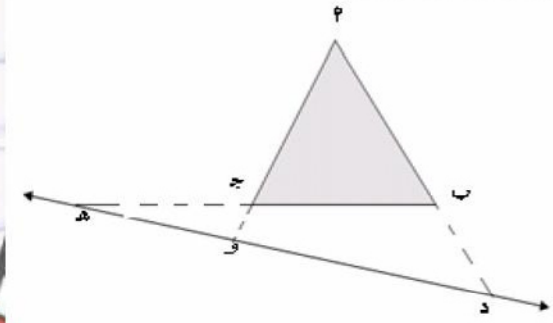
المستقيمان متوازيان إذا وفقط إذا كان : $م_١ = م_٢$

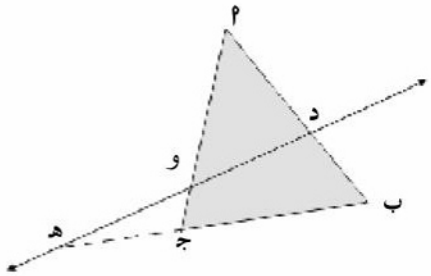
المستقيمان متعامدان إذا وفقط إذا كان : $م_٢ = -\frac{١}{م_١}$

## نظرية منيلوس

إذا قطع مستقيم المستقيمات الثلاثة الحاملة لأضلاع مثلث فإنه يقسم كل ضلع من أضلاع المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزأين ، ويكون حاصل ضرب ثلاثة أجزاء منها غير متتالية ، ومأخوذة في ترتيب دوري واحد يساوي حاصل ضرب أطوال الأجزاء الثلاثة الأخرى

أ د × ب هـ × جـ و = د ب × هـ جـ × و أ

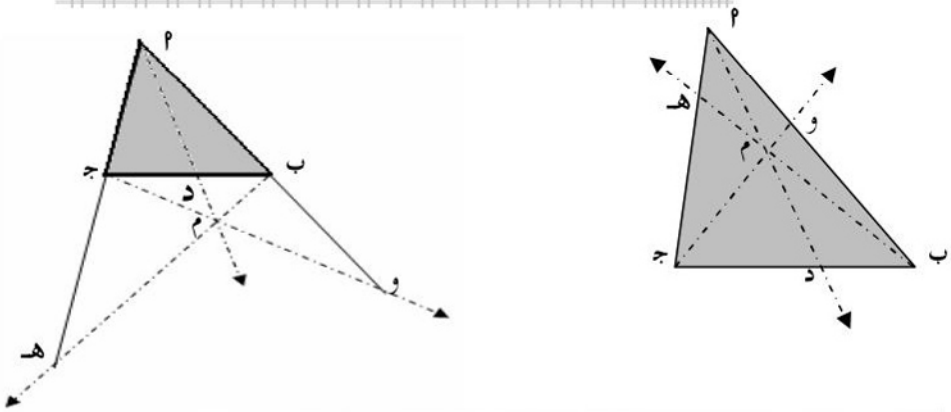


## نظرية شيفا

إذا رسمت من رؤوس أي مثلث إلى أضلاعه المقابلة ثلاثة أشعة متقاطعة في نقطة واحدة بحيث تقسم كل ضلع من أضلاع المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزأين فإن حاصل ضرب أطوال ثلاثة أجزاء غير متتالية ومأخوذة في ترتيب دوري واحد يساوي حاصل ضرب أطوال الأجزاء الثلاثة الأخرى .

ب د × ج هـ × أو = د ج × هـ أ × و ب




## القانون لحل المعادلة التربيعية في مجهول واحد

القانون العام لحل المعادلة : أ س$^{٢}$ + ب س + ج = صفر

هو : س = $\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ ج}}}{٢\text{أ}}$

حيث : أ معامل س$^{٢}$ ، ب معامل س ، ج الحد الخالي من س ويسمى المقدار : ب$^{٢}$ − ٤أ ج مميز المعادلة

وإذا كان : ب$^{٢}$ − ٤أ ج > ٠ فإن للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان

وإذا كان : ب$^{٢}$ − ٤أ ج < ٠ فإن للمعادلة حلان حقيقيان متساويان

وإذا كان : ب$^{٢}$ − ٤أ ج = ٠ فإن للمعادلة ليس لها أي حلول حقيقية ( لها حلان تخيليان)

## اللوغاريتمات

لوغاريتم العدد لأي أساس هو عدد مرات تكرار هذا الأساس عن طريق الضرب

$$م^{ب} \Longleftrightarrow لوم\ أ = ب$$

قوانين اللوغاريتمات

- لوم أ ب = لوم أ + لوم ب
- لوم $\frac{أ}{ب}$ = لوم أ - لوم ب
- لوم $أ^{ب}$ = ب لوم أ
- لوم م = ١
- لوم ١ = ٠
- لوم $\sqrt[ن]{أ}$ = $\frac{١}{ن}$ لوم أ

## التفاضل (الجزء الأول)

أولا: تعريف التفاضل

إذا كانت ص = د(س) فإن مشتقة ص بالنسبة إلى س أي $\frac{ءص}{ءس}$ تعرف كالتالي :

$$\frac{ءص}{ءس} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ء(س + هـ) - ء(س)}{هـ} = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{ء(س + \Delta س) - ء(س)}{\Delta س}$$

حيث و = $\Delta$ س ويرمز أيضاً للمشتقة الأولى أيضا بالرمز صَ

## التفاضل (الجزء الثاني)

فيما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ أ، ب، جـ ، ن ثوابت.

- $\frac{ء}{ءس}$ ( جـ ) = صفر
- $\frac{ء}{ءس}$ ( جـ س ) = جـ
- $\frac{ء}{ءس}$ ( جـ $س^{ن}$ ) = ن جـ $س^{ن-١}$
- $\frac{ء}{ءس}$ (ل ± ص ± ع ±.....) = $\frac{ءل}{ءس}$ ± $\frac{ءص}{ءس}$ ± $\frac{ءع}{ءس}$ ± .....
- $\frac{ء}{ءس}$ ( جـ ل) = $\frac{ءل}{ءس}$

## التفاضل (الجزء الثالث)

فيما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ أ، ب، جـ ، ن ثوابت.

- $\frac{ءص}{ءس}$ ( لص) = ل $\frac{ءل}{ءس}$ + ص
- $\frac{ءص}{ءس}$ ($\frac{ل}{ع}$) = [ ع $\frac{ءل}{ءس}$ − ل $\frac{ءع}{ءس}$ ] ÷ $ع^{٢}$ حيث ع ≠ صفر
- $\frac{ءص}{ءس}$ ( $ل^{ن}$ ) = ن $ل^{ن-١}$ $\frac{ءل}{ءس}$
- $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءل}$ × $\frac{ءل}{ءس}$
- $\frac{ءل}{ءس}$ = ١ ÷ [$\frac{ءس}{ءل}$]

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

## التفاضل (الجزء الرابع)

فيما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ أ، ب ، جـ ، ن ثوابت.

- $\frac{ء}{ءس}$ ( جا ي ) = جتا ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ ( جتا ي ) = − جا ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ ( ظا ي ) = قا$^{٢}$ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ ( ظتا ي ) =− قتا$^{٢}$ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ (قاي) = قاي ظا ي $\frac{ءي}{ءس}$
- $\frac{ء}{ءس}$ (قتا ي) = − قتا ي ظتا ي $\frac{ءي}{ءس}$

## التفاضل (الجزء الخامس)

تفاضل الدوال الأسية واللوغاريتمية:

- $\frac{ء}{ءس} e^{س} = e^{س}$ ، $\frac{ء}{ءس} e^{و(س)} = e^{و(س)} . وَ(س)$
- $\frac{ء}{ءس}$ لو$_{هـ}$ س = $\frac{١}{س}$ ، لو$_{هـ}$ و (س) = $\frac{١}{و(س)}$ وَ(س)
- لو$_{أ}$ س = لو$_{هـ}$ س . لو$_{أ}$ هـ
- $\frac{ء}{ءس}$ أ$^{س}$ = أ$^{س}$ . لو$_{هـ}$ أ ، $\frac{ء}{ءس}$ أ$^{و(س)}$ = أ$^{و(س)}$ . وَ(س) لو أ

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

## قواعد عامة في التكامل (الجزء الأول)

يما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ أ، ب، جـ ، م ، ن ثوابت.

- ∫ أ ء س = أ س + ث
- ∫ أ( ء س) ء س = ء( س) ء س
- ∫ (ل ± ص± ع ± .....) ء س =∫ل ء س ±∫ ص ء س ±∫ ع ء س ± .....
- ∫ل ء ص = ل ص − ∫ ص ء ل ( التكامل بالتجزيء)
- ∫ ء( أ س) ء س = $\frac{١}{أ}$ ∫ ء( ل ) ء ل.
- ∫ ل$^{ن}$ ء ل = $\frac{ل^{ن+١}}{ن+١}$ + ث ( ن ≠ −١)

## قواعد عامة في التكامل (الجزء الثاني)

يما يلي لاحظ أن : ل ، ص ، ع عبارة عن دوال ؛ أ، ب، جـ ، م ، ن ثوابت ∈ ح

- ∫ جا س ء س = − جتا س + ث.
- ∫ جتا س ء س = جا س + ث.
- ∫ ظا س ء س = لو قا س = − لوجتا س + ث.
- ∫ ظتا س ء س = لو جا س + ث.
- ∫ قا$^{٢}$ س ء س = ظا س + ث.
- ∫ قتا$^{٢}$ل ء س = − ظتا س + ث.
- ∫ جتا ن س = جا ن س + ث.
- ∫ جا ن س = جتا ن س + ث.
- ∫ قا س ظا س ء س = قا س + ث.
- ∫ قا ن س ظا ن س ء س = − ن قا س + ث.
- ∫ قتا ن س ظتا ن س ء س = − ن قتا س + ث.

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper

## هندسة تحليلية ( الجزء الأول)

- المسافة بين نقطتين أ( س$_{١}$، ص$_{١}$) ، ب( س$_{٢}$، ص$_{٢}$)

$$ل = \sqrt{(س_{٢} - س_{١})^{٢} + (ص_{٢} - ص_{١})^{٢}}$$

- ميل الخط المستقيم إذا علمت نقطتين ( س$_{١}$، ص$_{١}$) ، ( س$_{٢}$، ص$_{٢}$) عليه:

م = = ظا هـ

- معادلة المستقيم بمعلومية نقطتين عليه أ( س$_{١}$، ص$_{١}$) ، ب( س$_{٢}$، ص$_{٢}$)

$$\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$$

## هندسة تحليلية ( الجزء الثاني)

١) معادلة المستقيم بمعلومية الميل م و نقطة عليه ( س$_{١}$، ص$_{١}$) .

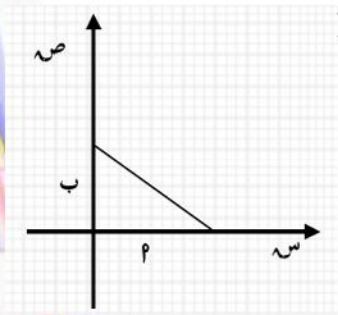
ص − ص$_{١}$ = م ( س − س$_{١}$) .

٢) معادلة الخط المستقيم بمعلومية الجزء المقطوع من محور الصادات.

ص = م س + جـ (حيث الجزء المقطوع من محور الصادات ، م الميل)

٣) معادلة الخط المستقيم بمعلومية الجزأين المقطوعين من محور ي الإحداثيات.

$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ (حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠)




نتائج:

- معادلة محور السينات : ص = ٠
- معادلة محور الصادات: س = ٠
- معادلة مستقيم يوازي محور السينات وعلى بعد منه يساوي ك هي : ص = ك.
- معادلة مستقيم يوازي محور الصادات وعلى بعد منه يساوي ك هي : س = ك

٤) الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم.

أ س + ب ص + جـ = ٠ (حيث أ ، ب ، جـ ∈ مجموعة الأعداد الحقيقية ).

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paper

## هندسة تحليلية ( الجزء الثالث)

١) طول العمود الساقط ( ل) من النقطة ( س$_{١}$، ص$_{١}$) على المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

$$ل = \frac{أ\ س_{١} + ب\ ص_{١} + جـ}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}$$

٢) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق : س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = نق$^{٢}$

٣) معادلة الدائرة التي مركزها أي نقطة ( ل ، ك ) ونصف قطرها نق : ( س− ل)$^{٢}$ + ( ص − ك)$^{٢}$ = نق$^{٢}$

٤) معادلة الدائرة التي نهايتا أحد أقطارها ( س$_{١}$، ص$_{١}$) ، ( س$_{٢}$، ص $_{٢}$)

= (س − س$_{١}$)( س− س $_{٢}$) + ( ص − ص$_{١}$)( ص− ص$_{٢}$) = ٠

٥) معادلة الدائرة التي نصف قطرها نق و مركزها ( ل ، ك ) و تمر بنقطة الأصل =

س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ٢ ل س + ٢ ك ص = ٠

٦) صورة المعادلة العامة للدائرة : س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

أو: ( س− ل)$^{٢}$ + ( ص − ك)$^{٢}$ = ( ل$^{٢}$ + ك$^{٢}$ − جـ )

ومركز هذه الدائرة في الصورة العامة ( − ل ، − ك ) ، و نصف قطرها = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - جـ}$

وهي : معادلة من الدرجة الثانية في كل من س ، ص

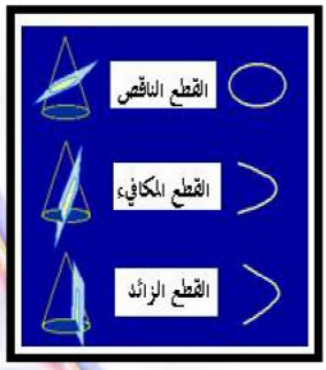
، معامل س$^{٢}$ = معامل ص$^{٢}$ ، معامل س ص

## هندسة تحليلية ( الجزء الرابع )

القطوع المخروطية ( الناقص ، المكافيء ، الزائد)

إذا تحركت نقطة في مستوى بحيث كانت النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة إلى بعدها عن مستقيم ثابت في المستوى مقداراً ثابتاً ، فإنها ترسم منحنى يسمى قطعاً مخروطياً.

وتسمى النقطة الثابتة بؤرة القطع ( focus) ، ويسمى المستقيم الثابت دليل القطع ( Directrix) وتسمى النسبة الثابتة الاختلاف المركزي للقطع ( Eccentricity) ويرمز له عادة بالرمز هـ ، وعلى قيمة هـ يتحدد نوع القطع المخروطي:




١) إذا كانت: هـ = ١ يسمى القطع المخروطي قطعاً مكافئاً.

٢) إذا كانت: هـ < ١ يسمى القطع المخروطي قطعاً ناقصاً.

٣) إذا كانت: هـ > ١ يسمى القطع المخروطي قطعاً زائداً.

ولقد سميت هذه المنحنيات قطوعاً مخروطية ، لأنها تنتج أيضاً من مقاطع المخروط الدائري القائم بمستويات معينة . وشكل القطع الناتج من تقاطع مستو مع مخروط دائري قائم يتوقف على زاوية ميل المستوي على محور المخروط أوجد النسبة بين مساحة الدائرة ومساحة المثلث.

نادي الرياضيات السعودي
Mathematics club paperb

# قواعد عامة في التكامل (الجزء الثاني)

| هـ ° | هـ دائري | جا هـ | جتا هـ | ظا هـ | ظتا هـ | قا هـ | قتا هـ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠° | ٠ | ٠ | ١ | ٠ | غير معرفة | ١ | غير معرفة |
| ١٥° | $\frac{ط}{١٢}$ | $\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$ | $\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ | $٢-\sqrt{٣}$ | $+٢\sqrt{٣}$ | $\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$ | $\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$ |
| ٣٠° | $\frac{ط}{٦}$ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ | $\sqrt{٣}$ | | ٢ |
| ٤٥° | $\frac{ط}{٤}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | ١ | ١ | $\sqrt{٢}$ | $\sqrt{٢}$ |
| ٦٠° | $\frac{ط}{٣}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{١}{٢}$ | $\sqrt{٣}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ | ٢ | |
| ٧٥° | $\frac{٥ط}{١٢}$ | $\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ | $\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$ | $٢+\sqrt{٣}$ | $٢-\sqrt{٣}$ | $\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$ | $\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$ |
| ٩٠° | $\frac{ط}{٢}$ | ١ | ٠ | $\pm\infty$ | ٠ | $\pm\infty$ | ١ |
| ١٠٥° | $\frac{٧ط}{١٢}$ | $\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ | $-\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$ | $-٢-\sqrt{٣}$ | $-+٢\sqrt{٣}$ | $-\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$ | $\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$ |
| ١٢٠° | $\frac{٢ط}{٣}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $-\frac{١}{٢}$ | $-\sqrt{٣}$ | $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ | $-٢$ | |
| ١٣٥° | $\frac{٣ط}{٤}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | $\sqrt{٣}$ | $-١$ | $-١$ | $-\sqrt{٢}$ | $\sqrt{٢}$ |
| ١٥٠° | $\frac{٥ط}{٦}$ | $\frac{١}{٢}$ | $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ | $-\sqrt{٣}$ | | ٢ |
| ١٦٥° | $\frac{١١ط}{١٢}$ | $\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$ | $-\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ | $-+٢\sqrt{٣}$ | $-٢-\sqrt{٣}$ | $-\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$ | $\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$ |
| ١٨٠° | ط | ٠ | $-١$ | ٠ | $\pm\infty$ | $-١$ | $\pm\infty$ |
| ١٩٥° | $\frac{١٣ط}{١٢}$ | $-\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$ | $-\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ | $٢-\sqrt{٣}$ | $+٢\sqrt{٣}$ | $-\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$ | $-\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$ |
| ٢١٠° | $\frac{٧ط}{٦}$ | $-\frac{١}{٢}$ | $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\sqrt{٣}$ | | $-٢$ |
| ٢٢٥° | $\frac{٥ط}{٤}$ | $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | ١ | ١ | $-\sqrt{٢}$ | $-\sqrt{٢}$ |
| ٢٤٠° | $\frac{٤ط}{٣}$ | $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $-\frac{١}{٢}$ | $\sqrt{٣}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ | $-٢$ | |
| ٢٥٥° | $\frac{١٧ط}{١٢}$ | $-\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ | $-\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$ | $+٢\sqrt{٣}$ | $٢-\sqrt{٣}$ | $-\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$ | $-\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$ |
| ٢٧٠° | $\frac{٣ط}{٢}$ | $-١$ | ٠ | $\pm\infty$ | ٠ | $\pm\infty$ | $-١$ |
| ٢٨٥° | $\frac{١٩ط}{١٢}$ | $-\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ | $\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}-\sqrt{٢})$ | $-٢-\sqrt{٣}$ | $-+٢\sqrt{٣}$ | $\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$ | $-\sqrt{٦}+\sqrt{٢}$ |
| ٣٠٠° | $\frac{٥ط}{٣}$ | $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{١}{٢}$ | $-\sqrt{٣}$ | $-\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ | ٢ | |
| ٣١٥° | $\frac{٧ط}{٤}$ | $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | $-١$ | $-١$ | $\sqrt{٢}$ | $-\sqrt{٢}$ |
| ٣٣٠° | $\frac{١١ط}{٦}$ | $-\frac{١}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $-\sqrt{٣}$ | | $-٢$ |
| ٣٤٥° | $\frac{٢٣ط}{١٢}$ | $-\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ | $\frac{١}{٤}(\sqrt{٦}+\sqrt{٢})$ | $-+٢\sqrt{٣}$ | $-٢-\sqrt{٣}$ | $\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$ | $-\sqrt{٦}-\sqrt{٢}$ |
| ٣٦٠° | ٢ط | ٠ | ١ | ٠ | $\pm\infty$ | ١ | $\pm\infty$ |

نادي الرياضيات الصوفي
Mathematics club paper