

EL NACIMIENTO DE LA MATEMÁTICA EN GRECIA

CONRADO EGGERS LAN



EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

Diseño de Tapa: **Carlos Pérez Villamil**

Primera edición: 1995



EUDEBA S.E.M

Fundada por la Universidad de Buenos Aires

No se permite la reproducción total o parcial de este libro, ni su almacenamiento en un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio, electrónico, mecánico, fotocopia u otros métodos, sin el permiso previo del editor.

© 1995 EUDEBA S.E.M. - Editorial Universitaria de Buenos Aires Sociedad de Economía Mixta, Av. Rivadavia 1573, (1033) Buenos Aires, República Argentina

Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723
Derechos reservados
ISBN 950-23-0601-5
IMPRESO EN LA ARGENTINA

ÍNDICE

Prólogo.....	11
I El nacimiento de la matemática en Grecia.....	17
I. Filosofía, ciencia y matemática en Grecia, 17; 2. Lo "científico", lo "pre-científico" y lo "extra-científico", 21; 3. La demostración en la matemática griega, 25. Demostración y deducción, 30; 5. Deducción y fundamentación axiomática, 37.	
II Eudemo y el "catálogo de geómetras" de Proclo.....	43
I (La llamada "Historia de la geometría" de Eudemo), 43; II (Traducción del texto de Proclo), 48; III (Análisis del "catálogo de geómetras"), 54; IV (Conclusiones sobre las fuentes de que se sirvió Proclo), 71.	
III La influencia de Platón y Aristóteles en la axiomática euclidea.....	77
1. E. Kapp y Kv. Fritz: la prioridad de las premisas, 77; 2. Características de los principios, 79; 3. La axiomática de Euclides y sus dificultades, 81; 4. El origen dialéctico de los axiomas, según Szabó, 86; 5. El concepto de "dialéctica" en Platón y Aristóteles, 89; 6. Terminología dialéctica y terminología matemática, 93; 7. La noción supraempírica de "igualdad", 98; 8. La <i>Arché anypóthetos</i> y las <i>hypothesis</i> en la alegoría de la Línea, 100; 9. La crítica aristotélica a la consideración empirista de la geometría, 106; 10. Comparación entre el aporte de Platón y el de Aristóteles a la axiomática euclidea, 112.	
V Epicarmo y la aritmética pitagórica.....	115
VI El pitagorismo y el descubrimiento de lo irracional.....	127
La hipótesis del escándalo, 127; La "antigua" demostración de la irracionalidad, 130; La hipótesis de Hipaso como descubridor, 132; Del lucro con el saber, 136; De naufragios y secretos, 138; Hipótesis de un sofista como descubridor, 140.	
Índice de autores modernos.....	143

PROLOGO

*Nadie que ignore geometría tendrá
acceso a la filosofía platónica*

Tantas y tan diversas han sido las influencias culturales que la filosofía de Platón acogió en su seno, que bien podría decirse de ésta que constituye una enriquecedora síntesis de las expresiones del espíritu griego de los siglos V —y aun antes— y IV a.C. En la obra platónica —la del único filósofo de Grecia clásica que ha llegado íntegra hasta nosotros, y la que puede ser tenida con justicia por la mejor prosa de esa época— hallamos, en efecto, tanto la presencia de Homero, Hesíodo y los grandes poetas líricos y trágicos cuanto la de prácticamente todos los filósofos llamados hoy "presocráticos" (aunque sus nombres rara vez sean mencionados, lo cual ha dado lugar a protestas como la de Heiberg respecto de Demócrito; entendemos, sin embargo, que quejarse de que en los diálogos platónicos jamás leamos el nombre de Demócrito equivale a preferir la mera referencia erudita a la rica discusión con el atomista que hallamos en las últimas obras de Platón, y exigirle a éste el cumplimiento de reglas de la historiografía moderna que ni siquiera el padre de ella, Hegel, aceptó cumplir). A lo largo de esas páginas conviven el orfismo y toda clase de ritos místéricos con la construcción de poliedros regulares y los tratamientos de líneas irracionales; en fin, el mito con el logos, en un polifacetismo donde ningún protagonista de la civilización griega que Platón conociera se salva de una cruda crítica, por más que a la vez éste intente asimilar lo que en aquél considere como un profundo aporte a la verdad.

Esta situación lleva, a mi parecer de modo ineludible, a la conclusión de que difícilmente se pueda acceder a una legítima comprensión de Platón si no se profundiza en el contexto histórico-cultural que rodea la aparición de su obra (profundización que, programáticamente, propuse ya hace más de un cuarto de siglo —en forma ciertamente superficial, por tratarse precisamente de un esbozo programático— en mi *Introducción histórica al estudio de Platón*); y sugiere también que quienquiera

aborde dicho contexto histórico-cultural, en alguno de sus ámbitos específicos, probablemente deje un considerable vacío en su estudio si omite en él un debido conocimiento de Platón.

Aplicando este pensamiento al campo de la matemática griega, diré que hace más de dos décadas me percaté de que no estaba en condiciones de comprender al Platón de, por lo menos, buena parte del *Menón*, *República* VI-VII, *Teeteto* y *Timeo*, si no penetraba en el meollo de la matemática preeuclídea; y, recíprocamente, no mucho tiempo después de comenzar a estudiar ésta, he caído en la cuenta de que quien pretendiera historiarla desconociendo el pensamiento platónico cometería un error de magnitud análoga a la de aquel que se propusiera escribir una historia de la filosofía occidental sin tener en cuenta el aporte de los griegos.

La primera de estas dos premisas (o conclusiones, según como se vea) ya fue enunciada en la misma antigüedad griega tardía: el "nadie entre que ignore geometría" —que hemos parafraseado en nuestro epígrafe—, que, según los comentaristas aristotélicos del siglo VI d.C. Elías y Filópono, se hallaba a la entrada de la Academia, lo testimonia anecdóticamente, y sin duda estaba también en el propósito —cuatro siglos antes que aquéllos— de Teón de Esmirna, cuando tituló a su libro *Exposición de temas matemáticos útiles para leer a Platón*, aunque su óptica neopitagórica no haya sido la más favorable para detectar lo estrictamente científico en la matemática que interesó a Platón y que éste propició.

En cuanto a la segunda, ciertamente tropecé con interpretaciones extremas, que en un caso hacían de Platón un matemático creador y en el otro sólo un lector curioso que no significaba nada más que eso para la historia de la matemática griega. Por otra parte, y en la medida que la historia de la filosofía no comienza con Platón, y en varios manuales se tenía por iniciadores de la matemática griega a algunos de esos filósofos anteriores, como Tales y Pitágoras (aunque también en algún caso a algún pensador posterior, como Eudoxo, ligado empero a la Academia platónica), tuve que abordar el estudio de la matemática griega en estrecha conexión con la historia de la filosofía, especialmente en esa extensa etapa que va desde sus comienzos hasta por lo menos Aristóteles, en que el cultivo de la filosofía y de la matemática y otras ciencias no aparece diferenciado en tipos distintos de personas, intereses o profesiones, aunque en todo momento se procure delimitar los ámbitos específicos. Allí descubrí —o al menos creí descubrir— que esa ausencia de diferenciación había sido decisiva para el nacimiento de la matemática y su

consolidación como ciencia, y que la filosofía se hallaba presente en los momentos decisivos del desarrollo de la matemática griega.

En esa búsqueda conté inicialmente con el apoyo de subsidios de la Universidad de Buenos Aires, que me permitieron no sólo emprenderla en equipos interdisciplinarios, sino también aceptar la invitación que, por gestión del importante filósofo Harold Cherniss, me formuló The Institute for Advanced Study, para visitar dicha institución en 1971, en Princeton, Estados Unidos, donde indagué el tema con el invalorable asesoramiento de Cherniss. Algo de los primeros resultados de esa tarea quedó reflejado en *El sol, la línea y la caverna*, editado por EUDEBA en 1975, y donde prometía desarrollos que la barbarie desatada en Argentina desde 1976 me impidió concretar, y sólo más tarde reanudé en México (después de detenerme en la medicina preplatónica por razones similares a las que me habían llevado a concentrarme en la matemática). De todas maneras, todavía en 1977 pude viajar a Alemania, gracias a un subsidio del Deutsch-Akademischer Austauschdienst, donde completé mi bibliografía y pude realizar provechosas consultas sobre todo con Kurt von Fritz en Munich y mi viejo maestro Hans-Georg Gadamer en Heidelberg. Una vez en México, tras el mencionado interludio de la investigación de la más antigua medicina hipocrática, tuve oportunidad de concluir lo que, tal vez presuntuosamente, intitué "Historia filosófica de la matemática griega preeuclídea". Pero, cuando los manuscritos iniciaban ya el proceso editorial, descubrí importantes puntos débiles que exigían una revisión a fondo del conjunto de la obra, por lo que postergué su publicación hasta efectuarla, cosa que hasta ahora no me ha sido posible más que en la forma parcial a que aludiré en seguida (de todos modos, mi retorno a la Universidad de Buenos Aires en 1985 y mi incorporación al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas desde 1989 me permiten planear trabajos futuros incluso más ambiciosos).

Precisamente, el presente volumen ofrece de algún modo una sustitución provisoria de aquella obra nunca publicada, a través de la reunión de los artículos plasmados a medida que iba revisando algunos de los puntos más importantes en cuestión. Acá no los ofrezco según el orden cronológico de su aparición originaria, sino en el que considero más pertinente para el entrelazamiento de las cuestiones.

De este modo, el último de ellos en ver la luz, "El nacimiento de la matemática en Grecia" —cuyo título hemos utilizado también para rotular todo el volumen—, figura aquí en primer lugar (I), dado que en él se precisan algunos conceptos básicos para narrar una historia de la mate-

mática griega, tales como el de "ciencia", en su diferenciación del de "filosofía", y para saber, consiguientemente, cuándo se puede hablar de "matemática científica", así como los procedimientos que caracterizan a ésta, y de los que hacemos depender criterios que permitan decir cuándo un momento es inicial, y en qué sentido.

En segundo lugar ponemos "Eudemo y el 'catálogo de geómetras' de Proclo" (II), por el hecho de que concierne a un problema que debería ser preliminar a todo intento de historiar la matemática griega, a saber, el de evaluar las fuentes en que puede apoyarse, comenzando por la más usual, que es la generalmente denominada "historia de la geometría" de Eudemo.

En tercer lugar va "La influencia de Platón y Aristóteles en la axiomática euclidea" (III), que ha sido tal vez el texto que mayores modificaciones ha sufrido, respecto de su tratamiento dentro de la obra que quedó inédita, tal vez por contener el tópico más ligado a la temática que dio origen a toda la investigación. Y sin duda es el que sigue requiriendo mayores cambios y una mayor elaboración; no obstante, en este volumen me he limitado a un maquillaje menor mediante subtítulos ordenadores, dejando sin tocar —como en los otros casos— su contenido, con excepción de un breve párrafo respecto de la formulación de la dialéctica en los diálogos tardíos de Platón (texto al que corresponde la nota 34), que he cambiado ligeramente para evitar una colisión con lo que pienso actualmente sobre ese punto.

Los últimos dos, "Epicarmo y la aritmética pitagórica" (IV) y "El pitagorismo y el descubrimiento de lo irracional" (V), desarrollan un punto latente en las conclusiones de (II), que concierne a la supuesta matemática de Pitágoras y sus sucesores, tema que me ha parecido urgente poner sobre el tapete de la discusión pública, dada la ligereza con que se lo suele dar por resuelto (no me refiero, claro está, a la posición de importantes historiadores de la matemática griega sino a la difusión escolar del tema, especialmente en nuestro medio), y dada también la magnitud del problema en el último de los casos, decisiva sin duda para el trazado de la historia de la ciencia.

Corresponde aquí agradecer a los responsables de los volúmenes en que los artículos aparecieron por primera vez, por su autorización para reproducirlos aquí, con muy pocas variantes más que las implicadas en la nueva composición tipográfica. En el caso de (I), publicado en *Enharmonar*, Barcelona, al Dr. Josep Montserrat i Llorens; en el de (II), aparecido en *Emerita*, Madrid, al Prof.Dr. Francisco Rodríguez Adrados; en el de (III), *Nova Tellus*, Mexico, a los Dres. Roberto Heredia y Mauricio

Beuchot; en el de (IV), *Studia Humanitatis. Homenaje a Rubén Bonifaz Nuño*, México, a la Dra. Elisabeth Luna Trail. En el caso del (V), al Comité de Redacción de *Méthexis, Revista Argentina de Filosofía Antigua*.

Finalmente, y dado que los estudios que dieron origen a aquella obra inicial y a los artículos desprendidos de ella, como así a la presente recopilación, fueron iniciados hacia fines de la década del 60 y han sido realizados durante un período en el que pasé algunos de los momentos más duros de mi vida, sería excesivamente ingrato callar que ni esos estudios, ni esa obra, ni los artículos ni su recopilación habrían sido para mí posibles sin la compañía constante y la permanente fuerza creadora de vida y de amor de Loretta Brass, mi esposa.

Ituzaingó, diciembre de 1994

I EL NACIMIENTO DE LA MATEMÁTICA EN GRECIA*

1. FILOSOFÍA, CIENCIA Y MATEMÁTICA EN GRECIA

Cuando pretendemos rastrear la historia de una ciencia en la antigüedad griega se nos plantea ineludiblemente el problema que suscita la circunstancia de necesitar trabajar, al menos en principio, en dos ámbitos distintos: el de la ciencia de que se trate y el del mundo griego antiguo con su peculiaridad. Si se quisiera hacer prevalecer en la tarea un tercer ámbito, el de la historia de la ciencia, semejante reivindicación podría valer como especialidad universitaria o editorial, pero con mucha probabilidad tendría que abdicar, no sabemos si ante el ámbito de cada ciencia o si ante cada época histórica, pero seguramente sí ante la matemática griega.

Cualquier historiador de la ciencia en general y de la matemática en particular sabe que hacer historia de la matemática no es hacer matemática —a diferencia del hacer historia de la filosofía, que implica siempre hacer filosofía—, aunque deba contar como mínimo con determinada cantidad y calidad de conocimientos matemáticos previos a su tarea de historiador. Lo que no siempre cualquier historiador de la ciencia en general y de la matemática en particular sabe es que hacer historia de la matemática griega equivale a penetrar en la historia del espíritu griego, de la cual el pensamiento conceptual en general, naturalmente, y en particular el pensamiento matemático son aspectos esenciales, y en la cual filosofía y matemáticas se hallan significativamente interpenetradas.

Cuando consulté —primero epistolarmente y luego en forma perso-

* Publicado por primera vez en *Enharonar* 21 (1993), Barcelona, p. 7-26.

nal— a Kurt von Fritz sobre el tema, me respondió con estas palabras: "Si la evolución de la matemática griega antigua ha sido —por completo o en forma predominante— *de índole exclusivamente matemática*, o si han influido en ella ideas filosóficas, es un viejo tema de discusiones. Personalmente me parece evidente —tal como usted piensa— que dicha evolución ha recibido, en distintas épocas, fuertes estímulos por parte de filósofos, aunque va de suyo que también ha habido siempre posteriores desarrollos *de índole exclusivamente matemática*".¹

En la traducción de estas, para nosotros, importantes líneas del distinguido historiador germano de la ciencia griega me he visto obligado a recurrir a una perífrasis —que hemos subrayado por nuestra cuenta en el texto— para verter al español un solo vocablo alemán, por otra parte clave, *innermathematisch*, sin quedar del todo conformes con la correspondencia obtenida.² La duda que al respecto nos suscitó dicha respuesta es: ¿existe algo *innermathematisch* en la matemática, o sea, algo puramente matemático?

Cabe en ese sentido llamar la atención sobre el uso que de los vocablos pertinentes han hecho los dos filósofos griegos que han acuñado la mayor parte de la terminología básica de la filosofía y de la ciencia que ha sobrevivido hasta nosotros. En efecto, en el *Teeteto* (143d) Platón habla "de la geometría o de cualquier otro tipo de *philosophía*". Y Aristóteles, en su *Metafísica* (VI 1, 1026a), distingue "tres *philosophíai* teoréticas: *mathematiké*, física y teológica", en lo cual alterna *philosophía* con *epistéme* (la teología es tanto la "*philosophía* primera" como la "*epistéme* primera"), y lo mismo cabe decir de Platón. La diferencia entre el uso de uno y otro término parece residir en que *philosophía*, como su vocablo simple, *sophía*, designa más bien una actitud vital de amor a la verdad, en tanto que *epistéme* alude a la forma de acceder a esa verdad; una forma que se distingue de la "experiencia" o *empeiría* en que con ésta sólo se alcanza lo particular, mientras la *epistéme* llega al conocimiento universal (Arist., *Met.* I 1, 981a-b; cf. Platón, *Rep.* III 409b).

Aunque, como vemos, Platón y Aristóteles llamaron tanto *philosophía* como *epistéme* no sólo a lo que hoy denominaríamos "filosofía" sino también a lo que damos el nombre de "ciencia", la historia ha querido

1. Carta fechada en Munich el 23 de febrero de 1977.

2. En sentido estricto, *inner* sugiere "dentro de", "en el ámbito de". Vale decir, *innermathematisch* significa, literalmente, "interior a la matemática", lo cual equivale a excluir lo externo a la matemática: sobre todo la filosofía, en el caso mencionado en la carta.

que el primero de dichos términos griegos quedara reservado exclusivamente para la "filosofía", en tanto el segundo para la "ciencia", si bien, por lo menos desde Kant, ha ido cobrando fuerza en la modernidad la tendencia a asegurarle un carácter "científico" a la "filosofía", con la intención de restarle fantasía a su vuelo y prestarle, en cambio, rigor. Pero eso no fue nunca pensado así en Grecia.

¿Significa acaso lo dicho que no hubo en Grecia diferencia entre la filosofía y la ciencia, o, al menos —en el caso que nos interesa más acá— entre filosofía y matemática? Por cierto que la hubo, aunque no en cuanto a la actitud de desear conocer o respecto de la forma de conocer; y tampoco en lo que hace al objeto. Porque si de la filosofía podría decirse que aspira a la totalidad,³ no puede decirse que la ciencia busque siempre "aspectos" o "partes" de la misma; en particular, no podría afirmarse tal cosa de la matemática.

Aquí una vez más Platón y Aristóteles, sin haber señalado diferencias entre "filosofía" y "ciencia", nos dan una pista: el tipo de causa buscada. Platón distingue, en *Timeo* 46d-e, entre "causas primeras" o "de naturaleza inteligente" (que en *Fedón* 99b constituyen la "causa" sin más) y "causas segundas", que "mueven por necesidad" (llamadas en *Fd.* 99b "aquello sin lo cual jamás la causa sería causa", es decir, la *conditio sine qua non*). Esto implica una distinción entre la búsqueda de causas que sirvan de *fundamento* a lo que se trata de explicar y que sean de otra índole que esto,⁴ otorgándole un sentido que lo tornen comprensible, y la búsqueda de causas mecánicas que Platón considera "auxiliares", en cuanto permiten el cumplimiento de tal sentido: en el ejemplo del *Fedón* serían los huesos y músculos del cuerpo de Sócrates, sonidos, aire, oídos, que posibilitan el accionar de la "verdadera causa", a saber, la decisión de Sócrates de no fugarse de la cárcel sino aguardar su muerte filosofando con sus amigos. Por cierto que Platón, desde el momento que identifica "filosofía" y "ciencia", no dice que la primera se ocupe sólo de las causas primeras y la otra se dirija a las causas segundas, sino que integra en la filosofía = ciencia la búsqueda de ambos tipos, subordinando las segundas a las primeras; pero la historia posterior,

3. Cf. H. -G. Gadamer, *Vernunft im Zeitalter der Wissenschaft*, Frankfurt, Suhrkamp, 1976, pág. 7.

4. Ésta es, según Nikolai Hartmann, una característica de los legítimos principios explicativos: "explican los fenómenos por medio de algo básicamente distinto de los fenómenos" ("Zur Lehre vom Eidos bei Platon und Aristoteles", 1941, en *Kleinere Schriften* II, Berlin, de Gruyter, 1957, pág. 156).

como sabemos, desgajó la ciencia de la filosofía y, con ello, separó también las búsquedas, si bien jamás lo logró del todo.

El pensamiento de Aristóteles es similar, aunque nunca hable de "causas segundas" (sí de "causas primeras", p.e. *Met.* I 2, 982b2, b9; 3, 983a24-26, etc.), ya que su esquema causal es más complejo —cuádruple, como es sabido—; pero en los *Segundos Analíticos* II 11, 94a22, a propósito de los principios de las ciencias apodícticas (es decir, las que proceden por demostración deductiva) tiene en vista algo parecido al describir la segunda de esas causas (en primer lugar menciona la esencial): "el existir necesariamente a partir de ciertas cosas" o "lo que, dadas ciertas cosas, se sigue necesariamente".

Es interesante para nuestro propósito observar el ejemplo con que Aristóteles ilustra este tipo de causa "necesaria": "¿Por qué el <ángulo inscripto> en un semicírculo es recto? ¿dadas qué cosas <se sigue necesariamente> que es recto? Sea A un ángulo recto, B la mitad de dos ángulos rectos, C el <ángulo inscripto> en el semicírculo. Entonces B es la causa de la pertenencia de A, el ángulo recto, a C, el <inscripto> en el semicírculo." El ejemplo (que, según Heath,⁵ parece estar presente en Euclides III 31 como interpolación) muestra claramente que el mecanismo "intrínsecamente matemático" es la "causación necesaria", el nexo peculiar de la deducción lógica, el mismo que hallamos a lo largo de los trece libros de los *Elementos*. De este modo, lo que en éstos puede ser considerado *innermathematisch* sería no menos *innerlogisch*. Y en este sentido, algo que, según veremos más abajo, nuestros testimonios acreditan como usado por primera vez por Parménides, quien no fue matemático sino filósofo. Pero el hecho que Aristóteles señala al comienzo de la obra citada, de que las ciencias demostrativas deben partir de principios no-demostrables, no parece *innermathematisch* ni *innerlogisch*, y menos aún lo es la caracterización de la índole y propiedades de tales principios: más bien se trata, como veremos, de exigencias epistemológicas nacidas en el seno de la Academia platónica y del Liceo aristotélico, esto es, de escuelas filosóficas.⁶

Lo dicho significa que es cierto que podemos decir que en la filosofía griega predomina la búsqueda de las causas primeras mientras en la matemática griega se recurre más a la "causa necesaria" —tan similar

5. *Mathematics in Aristotle*, Oxford 1949, pág. 72.

6. Cf. mi trabajo "La influencia de Platón y Aristóteles en la axiomática euclidea", en *Nova Tellus* 2, 1984, págs. 27-66; *infra* pág. 77 ss.

a las causas segundas platónicas— de los *Segundos Analíticos*.⁷ Pero no menos cierto es que el nacimiento de la matemática griega nos muestra a ésta tan penetrada de filosofía, que resulta difícil de admitir que contuviera elementos de índole exclusivamente matemática, al menos de relevancia histórica, lo cual no implica por cierto rehusarse a ver el hecho de que la moderna historia de la matemática exhiba tal tipo de desarrollos (que inclusive han invadido con frecuencia a la filosofía).

Esto nos llevará a tratar de determinar el momento en que nace la matemática griega, para describir sus rasgos peculiares.

2. LO "CIENTÍFICO", LO "PRECIENTÍFICO" Y LO "EXTRACIENTÍFICO"

Toda ciencia, antes de constituirse como tal, atraviesa un período más o menos extenso en el cual suelen aparecer muchos elementos o temas que luego integrarán el cuerpo —o alguna parte de éste— de la ciencia. Por ejemplo: el hombre lleva a cabo los más diversos tipos de tratamientos de enfermedades, incluso con éxito, y es capaz de discernir no sólo las partes más visibles del cuerpo humano sino también muchos órganos internos, sin que quepa hablar de "medicina" en sentido científico.

Así también el hombre puede no sólo distinguir el sol, la luna y los astros que pueblan el firmamento nocturno, sino también advertir muchos de sus movimientos y llegar a calcularlos, y permanecer, sin embargo, en un ámbito ajeno a la ciencia de la astronomía en sentido estricto.

Análogamente, el hombre cuenta —p.e. ovejas, frutas, piedras—, las suma y resta, multiplica y divide, y además efectúa esos cálculos y otros más complicados sin tener en vista tales objetos, y no necesariamente por eso estará haciendo aritmética científica.

Y del mismo modo traza las más diversas y difíciles figuras, desde el triángulo, el cuadrado y el círculo hasta los polígonos de mayor número de lados —fabricando incluso cuerpos piramidales y balones forma-

7. Nótese que Aristóteles da a entender que dicha causa no puede operar plenamente en el mundo físico, cuando observa, pocas líneas más abajo del pasaje traducido, que "la naturaleza a veces obra con un propósito, a veces por necesidad" (*Seg. Anal.*, II 11, 94b36-37).

dos por pentágonos regulares de cuero unidos de manera tal que puedan constituir una esfera—, pero eso no bastará para que pensemos que está cultivando la geometría como ciencia.

Se hace necesario, pues, determinar cuál es el criterio que nos guía para afirmar que en un momento dado un conjunto de conocimientos configura una ciencia.

Antes de intentar fijar dicho criterio, empero, conviene hacer notar que, aun cuando hemos hablado de un "período" previo a la constitución de una ciencia como tal, y a grandes rasgos lo hemos ejemplificado, los ejemplos que hemos dado de elementos o temas que "luego" integran el cuerpo de la ciencia pueden seguir apareciendo en la forma anterior, al margen de la construcción de dicha ciencia.

En efecto, un individuo —y sus sucesores y coetáneos— puede continuar durante un tiempo indefinido tratando enfermos, sin que ese tratamiento llegue jamás a ser científico; o calculando el número de lunas —la cantidad de veces que la luna cumple las cuatro fases de su ciclo— que faltan para la cosecha o para el parto, sin acceder nunca a la astronomía científica; o bien haciendo los cálculos más complicados o trazando las figuras más difíciles en forma armoniosa, sin arribar en momento alguno a vislumbrar siquiera la ciencia de la aritmética y de la geometría. Esto puede acaecerle a un pueblo entero, a una sociedad íntegra, a toda una civilización; pero también puede acontecerle a individuos o grupos —cultos o no— en el seno de una sociedad que ha alcanzado el conocimiento de la ciencia respectiva, en la medida que este conocimiento sea patrimonio de individuos o grupos distintos a aquéllos, y que —por razones que pueden ser muy diversas— no se haya producido entre ellos una intercomunicación de dicho conocimiento.

Vale decir, los elementos y temas que aparecen en un "período" previo al establecimiento de la ciencia misma no sólo pueden existir en un "período previo" a la ciencia, ya que su existencia no desemboca necesariamente en la ciencia. *En otras palabras: el conocimiento humano no evoluciona en forma unidireccional; ni siquiera evoluciona necesariamente, y, si evoluciona, puede hacerlo en múltiples direcciones, algunas de las cuales conducen a la ciencia y otras no.*

De acuerdo con lo dicho, los elementos y temas que aparecen en un "período" previo a la formación de la ciencia pueden ser calificados de *pre-científicos*. Y esta denominación les corresponde aun en los casos en que no desemboquen nunca en ciencia —o que continúen desenvolviéndose al margen de la ciencia—, ya que el hecho de que históricamente

aparezcan alguna vez precediendo a una ciencia que los integre en sí misma permite considerarlos, incluso en otras ocasiones, ubicados en un estadio que puede ser superado por el de la ciencia.

Pero en el mismo "campo" —por así llamarlo— en que aparecen los elementos y temas "pre-científicos" hallamos elementos y temas que nunca vemos, en el curso de la historia, ingresar en el cuerpo de la ciencia. Tal el caso, por ejemplo, de la influencia del curso de los astros en el destino de los individuos, o del poder de los números o de ciertas figuras en la vida de los hombres. Estos elementos y temas pueden mezclarse con los "pre-científicos", pero, en la medida que nunca se incorporen a la ciencia como tal, los denominaremos *extra-científicos*. Su marginación de la ciencia es total a lo largo de la historia, no circunstancial, como hemos visto que acontece con los "pre-científicos".

Ciertamente, el hecho de que no veamos nunca a esos elementos y temas integrarse en la ciencia no significa, ~~terminantemente~~, que *no puedan nunca* integrarse en ella. Si el heliocentrismo de Aristarco de Samos tardó dieciocho siglos en adquirir categoría científica —con Copérnico—, los mencionados elementos y temas "extra-científicos" deben gozar cuando menos —quizá no todos ni su mayor parte— del beneficio de la duda en cuanto a la posibilidad de tal integración. Pero en tanto no se verifique ésta, y los encontremos resistentes a someterse a las pautas de la ciencia, los consideraremos "extra-científicos". Y esta distinción con lo "pre-científico" es de suma relevancia para la mejor comprensión de la ciencia griega, donde suele aparecer tan poco clara y tan fácil de ignorar por el observador moderno.

Las últimas frases nos hacen volver a la cuestión, que ahora se torna más apremiante, del criterio con el cual decidimos que cabe hablar de ciencia en sentido estricto.

Una mirada a la historia de las ciencias en general y de la matemática en particular, así como a las discusiones que en cada ámbito se promueven acerca del momento científico inicial —en sentido estricto— y de los criterios para fijarlo, nos llevan a descartar concepciones demasiado vagas o insuficientes como la de que ciencia sea un "saber cierto" o al menos "verificable" o una "organización sistemática de conocimientos", que pueden valer acaso como caracterizaciones generales —en el último caso— pero no permiten una aplicación a los hechos que posibilite establecer con algún grado de aproximación cuándo nace una ciencia.

Dicha mirada suscita una observación que es sin duda obvia y por eso, paradójicamente, tal vez poco tenida en cuenta en tales discusiones:

hay instancias del pensamiento humano que muestran a lo largo de siglos —o milenios— una cuidadosa organización que puede ser calificada de sistemática, pero sin que se produzcan modificaciones importantes que permitan decir al historiador que inauguran una nueva etapa en la vida de ese núcleo de pensamientos. Hay otras, en cambio, en que, a pesar de momentos de estancamiento o de crisis, globalmente exhiben una evolución que incluso puede precisarse en distintas etapas que implican otros tantos avances.

Por consiguiente, creemos nosotros, el momento en que el pensamiento deja de ser "pre-científico", en el sentido antes señalado, para convertirse en "científico" se produce debido a la introducción de elementos que sientan algunas bases para un desarrollo ulterior, en el cual podrán surgir otros elementos que a su vez posibiliten nuevos avances. Esto es: el criterio a que recurrimos para decidir que hay ciencia en sentido estricto es el de *fecundidad histórica*. La astrología como tal no acredita cambios sustanciales desde los caldeos hasta nosotros; esto no impide, ciertamente, que contenga elementos que, en algunos casos, han influido en la ciencia astronómica, y, en otros, provienen de ésta. Pero precisamente en unos y otros casos dichos elementos se han desarrollado en la astronomía y no en la astrología. De ahí que, por ejemplo, a pesar de la antigua sabiduría astrológica de los babilonios, su astronomía, como ha mostrado Otto Neugebauer, no alcanzó una evolución notable hasta después de haber recibido la influencia de la astronomía griega ptolemaica.⁸ La astrología, como la numerología, interesan sin duda en la historia de la ciencia y de la filosofía antiguas (griegas en especial, sobre todo por el papel que han podido desempeñar en algunos grupos o corrientes de pensamiento, como el que constituyó el pitagorismo), pero corresponderían, dentro del esquema conceptual que hemos propuesto más arriba, al ámbito "extra-científico" y no al "científico".

En ese sentido, si se trata de determinar, de acuerdo con el criterio de fecundidad histórica, cuál es el elemento que permite dar el paso desde el momento "pre-científico" al "científico", dice Charles Kahn que "en la astronomía griega la idea de un modelo geométrico para la tierra y los cielos desempeñó el mismo papel revolucionario que la idea de prueba en matemática".⁹ Walter Burkert, por su parte, menciona "la

8. O. Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1975, Part C, pág. 541 ss.

9. C. H. Kahn, "On Early Greek Astronomy", en *The Journal of Hellenic Studies* 90 (1970), pág. 110.

exigencia de una prueba rigurosa en la geometría griega" y la de "una edificación axiomático-deductiva", mientras que en la astronomía "la construcción de un modelo universal [...], en el cual, a diferentes distancias, giran los planetas en torno a la tierra esférica",¹⁰ lo cual es —palabra más, palabra menos— algo ya casi unánimemente aceptado: ahora se discute sólo el momento exacto en que se puede decir que se produce, cosa que examinaremos más abajo en el caso de las matemáticas. Por nuestra parte, y respecto de la medicina, hemos creído encontrar en la introducción del concepto de "causa" en el tratado pseudo-hipocrático *De Vetere Medicina* el elemento que permite a la medicina una evolución científica, similar al de la prueba deductiva en geometría y al modelo matemático del mundo en astronomía.¹¹

3. LA DEMOSTRACIÓN EN LA MATEMÁTICA GRIEGA

Neugebauer ha expuesto convincentemente la tesis de la antigüedad del llamado "teorema de Pitágoras", que se remontaría al período Babilónico Antiguo.¹² Así, por ejemplo, en una tableta de la colección Yale (Nº 7289), vemos inscripto un cuadrado con sus dos diagonales. Sobre un lado del cuadrado está escrito el número 30, sobre una de las diagonales leemos la cifra 1;24,51,10; y debajo de la misma la cifra 42;25,35, todas en sistema sexagesimal, sistema que entre los babilonios cuenta con los llamados "números recíprocos", que indican la cantidad de veces que un número cabe exactamente en el 60 (así 2 y 30 son recíprocos entre sí). Para simplificar la explicación de Neugebauer, recordemos que, según el teorema de Pitágoras, si un triángulo rectángulo (isósceles en este caso, ya que es la mitad de un cuadrado) tiene 1 de lado, para dar con el valor de la hipotenusa x , deberemos extraer la raíz cuadrada de 2, ya que $1^2 + 1^2 = x^2$, o sea, $1 + 1 = x^2$. Ahora bien, en valores decimales tenemos que $\sqrt{2} = 1,414214$, lo cual representa, en

10. W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft*, Erlangen-Nürnberg 1962, pág. 379 y 278, respectivamente (cf. la traducción inglesa de E. L. Minar Jr, *Lore and Science*, Cambridge Mass. 1972, págs. 401 y 299).

11. [Hipócrates], *De la medicina antigua* (Introducción, texto crítico, traducción y notas de C. Eggers Lan), México, U.N.A.M., 1987, págs. XXXIII-XXXIX.

12. *The Exact Sciences in Antiquity*, 2a. ed. (ligeramente corregida de la de Brown Univ. Press, 1957), New York, 1969, pág. 35 y ss.

valores sexagesimales (con una aproximación de $22/60$), la cifra 1;24,51,10, que es una de las que hallamos sobre la diagonal (la hipotenusa) en la tableta Yale. Pero dado que el lado (el cateto) tiene valor 30, habrá que multiplicar por 30. Y si multiplicamos por 30 la cifra mencionada (lo que se hace fácilmente dividiéndola por 2, ya que 2 y 30 son recíprocos) el resultado es la otra cifra que da la tableta: 42;25,35. Esto implica que el valor de la diagonal del cuadrado ha sido obtenido a partir de su lado, lo cual, apunta Neugebauer, "es prueba suficiente de que el teorema de 'Pitágoras' era conocido más de mil años antes de Pitágoras [...]. En otras palabras, a través del transcurso íntegro de la matemática babilónica era conocido que la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa".¹³

Ciertamente, la palabra "teorema" puede ser usada en dos sentidos: uno es el referido a una determinada proposición, como la ya mencionada de que el cuadrado de la hipotenusa, en un triángulo rectángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Pero el "teorema" que en sentido estricto se integra en el cuerpo de la geometría científica (en el caso del "teorema de Pitágoras", los *Elementos* de Euclides, ya sea como I 47 o como VI 31) contiene la demostración de dicha proposición (la cual es entonces sólo la "prótasis" del teorema). Cuando Neugebauer dice que los babilonios conocían el teorema que lleva al nombre de Pitágoras diez siglos antes que éste viviera, se refiere sólo al primer sentido. Porque, en lo que hace al segundo, es con toda probabilidad más de un siglo posterior a Pitágoras, e implica un intento de superar la dificultad que provocó el advertir que la diagonal del cuadrado era incommensurable con su lado.¹⁴

Según Kurt von Fritz, "cuando los griegos comenzaron por vez primera a emplear métodos matemáticos más complicados, se vieron enfrentados a los métodos más desarrollados de sus vecinos orientales, en cuya aplicación no se podía distinguir entre soluciones aproximadas y exactas, porque cada método había sido desarrollado dentro de un ámbito especial de aplicaciones prácticas, para las cuales bastaban las aproximaciones alcanzadas en cada oportunidad. Esto, naturalmente, debía conducir por entonces a dificultades y divergencias cuando los métodos

13. Ob. cit., pág. 36.

14. Cf. nuestra discusión de este punto en "El pitagorismo y el descubrimiento de lo irracional", en *Méthexis* 2 (1988), págs. 17-32, *infra* págs. 127 ss.

como tales eran separados de la finalidad originaria de su aplicación y trasladados a otro ámbito. Dada esta situación, era muy natural que se quisiese saber con mayor exactitud y que se intentara dar a las proposiciones y métodos matemáticos una fundamentación más precisa y segura".¹⁵ En ese sentido piensa von Fritz que "ha habido, al comienzo de la matemática demostrativa de los griegos, un estadio en el cual [...] se ha creído poder y deber demostrar todo".¹⁶ En dicho estadio ubica Kurt von Fritz a Tales de Mileto, aunque empleando el procedimiento del *epharmózein* o superposición, en el cual basta una regla y un compás para demostrar empíricamente, por ejemplo, que dos triángulos son iguales entre sí, o que el círculo es dividido en dos partes iguales por el diámetro (este último caso, con la atribución a Tales de dicho procedimiento por parte de Proclo, *In Primum Euclidis Elem. Comm.* p.157,10-168-2 Friedlein, es citado expresamente por v.Fritz).¹⁷

Es importante detenemos en este punto, pues el texto de marras es la base de la afirmación de que Tales fue el primer geómetra científico (o sea, a comienzos del s. VI a.C.), hecha por diversos estudiosos, entre los cuales probablemente la autoridad más importante de la actualidad es el holandés Bartel L. van der Waerden.¹⁸

El meollo del pasaje de Proclo (p.157,10-13) dice: "En cuanto a que el círculo es dividido por el diámetro en dos partes iguales, dicen que Tales fue el primero en demostrarlo (*apodeixai phasin*)". Van der Waerden comenta así: "Proclo (vale decir, Eudemo) dice expresamente que Tales ha demostrado que el diámetro divide al círculo en dos mitades iguales [...]. En mi opinión, sería ridículo corregir a Eudemo argumentando que

15. Kurt von Fritz, *Platon, Theaetet und die antike Mathematik. Mit einem Nachtrag zum Neudruck*, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1969, Nachtrag págs. 69-70.

16. Ob. cit., pág. 71.

17. Ob. cit. págs. 70-71. Cf. "Die APXAI in der griechischen Mathematik", en *Archiv für Begriffsgeschichte* I (1955), pág. 79, e incluido también en *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin-New York, W. de Gruyter, 1971, pág. 403. Sobre el mismo tema del *epharmózein* y en el último volumen citado, se extiende von Fritz en el artículo de 1959 (publicado originariamente en el N° 4 de la citada revista *Archiv*) "Gleichheit, Kongruenz und Aehnlichkeit in der antiken Mathematik bis auf Euklid", pág. 430 ss.

18. B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft* (traducción alemana de H. Habicht), Basel-Stuttgart, Birkhäuser, 1956, págs. 145-148, y "Die Beweisführung in den klassischen Wissenschaften des Altertums", artículo de 1957 incluido en *Um die Begriffswelt der Vorsokratiker*, hrsg. v. H. -G. Gadamer, Darmstadt, Wiss. Buchg., 1968, págs. 43-48.

nosotros conocemos la geometría de Tales mejor que él. Eudemo debe haber tenido a mano algún escrito de Tales, pues sabía incluso con qué palabra designaba éste el concepto de igualdad de ángulos. Si entonces Eudemo nos dice que Tales ha demostrado tal teorema, nosotros, ignorantes, no podemos hacer nada mejor que creerle".¹⁹

Aclaremos que la referencia a que Eudemo conocía la palabra con que Tales designó la igualdad de ángulos proviene de otro pasaje de Proclo en el mismo comentario a Euclides (p.250,20-251,2), en el que leemos: "Hay que agradecer al viejo Tales por el descubrimiento de muchas otras cosas y por este teorema [sc. I 5 Eucl.], pues se dice (*légetai*) que fue el primero en conocer y decir que en todo triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales; aunque, en un <lenguaje> más arcaico, llamó 'similares' (*homoíās*) a los ángulos iguales (*ísas*)."

Ahora bien: en primer lugar, como se ve, Proclo no menciona en absoluto a Eudemo en ninguno de los dos pasajes, sino que habla de sus fuentes en forma indeterminada ("dicen", "se dice"), con vocablos (*phasin*, *légetai*) que suelen indicar una tradición generalmente oral. Para atribuir estos dos pasajes a Eudemo, en consecuencia, estimo que van der Waerden debe basarse en alguna tradición de los historiadores modernos de la matemática griega (cuyo iniciador desconozco), que infiere que, puesto que dos de las cinco veces que Proclo alude a Tales (a saber p.299,1-4 y 352,14-18), menciona a Eudemo como la fuente de su información ("Según dice Eudemo, fue descubierto primero por Tales" y "Eudemo, en la *Historia de la geometría*, atribuye a Tales este teorema", respectivamente), en los otros tres casos también debe haberse basado en Eudemo. El fundamento, como se ve, es harto precario. Fritz Wehrli, quien ha compuesto la más importante recopilación de fragmentos de Eudemo que existe,²⁰ en la cual ha incluido el más extenso de los tres pasajes restantes (el llamado "sumario de Proclo", tampoco a nuestro juicio en forma fundamentada),²¹ excluye sin embargo de su recopilación los dos pasajes en que se basa van der Waerden en su afirmación.

En segundo lugar, y aunque supusiéramos que la fuente de Proclo es la misma toda vez que habla de Tales (trátase de la bisección del

19. Artículo "Die Beweisführung" págs. 46 y 47 (subrayado del autor). Cf. *Erwachs. Wiss.* 146.

20. *Die Schule des Aristoteles, VIII. Eudemos von Rhodos*, Basel 1969².

21. Nos hemos extendido en un análisis detallado de dicho "sumario" en nuestro artículo "Eudemo y el 'catálogo de géometras' de Proclo", en *Emerita* LIII (1985), págs. 127-157; *infra* p. 43 ss.

círculo por el diámetro o de los ángulos de la base de un triángulo isósceles), la atribución a Tales del "conocer y decir" (*epistêsai kai eipeîn*) acerca de la igualdad de los ángulos, con la palabra "similares" en lugar de "iguales", no puede ser ninguna garantía de que la fuente de Proclo haya tenido a mano un escrito de Tales. Aun en el supuesto caso de que las palabras procedieran efectivamente de Tales, nada impediría que se tratara de una tradición oral. Incluso el hecho de que Proclo declare "se dice", *lēgetai*, lo exige. Pero además las palabras pueden no proceder de Tales sino de quien transmitía la cosa sabiendo o presumiendo que Tales no había manejado un concepto abstracto de "igualdad" sino de "similaridad" empírica como el que permitía el procedimiento del *epharmózein*.²²

Y es a ese procedimiento al que se refiere Proclo en el pasaje que van der Waerden toma como testimonio del uso de la demostración deductiva por parte de Tales: "En cuanto a que el círculo es dividido por el diámetro en dos [partes iguales], dicen que Tales fue el primero en demostrarlo (*apodeîxai*), y la causa de la dicotomía es el desplazamiento de la recta sin desvíos a través del centro. Pues al moverse a través del centro y mantener siempre en todas sus partes el movimiento, sin desviarse hacia uno u otro lado, separa a ambos lados porciones iguales de la circunferencia. Si quieres demostrar (*deiknyein*) esto con un procedimiento matemático, imagínate el diámetro trazado haciendo coincidir [o "superponiendo", *synarmozómenon*] una parte del círculo con la restante; porque, si una parte no es igual a la otra, aquélla caerá dentro o fuera de ésta; y en cualquiera de los casos se concluirá que la recta menor es igual a la mayor. En efecto, todas las rectas que van desde el centro hasta la periferia son iguales, por lo cual la recta que cae fuera será igual a la que cae dentro, lo que es imposible. Entonces una parte coincide (*epharmózei*) con la otra, de modo que son iguales. Por consiguiente, el diámetro divide al círculo en dos [partes iguales]" (157,10-158,2 Friedlein).

Como se echa de ver, Proclo no adjudica (y mucho menos Eudemo) a Tales ningún método deductivo sino que, como ejemplificación de lo que Tales demostró, recurre al procedimiento empírico del *epharmózein*, por lo cual la hipótesis de Kurt von Fritz de que Tales de Mileto pudo haberlo usado parece altamente probable, dados los testimonios aristofanescos acerca de su vinculación con la geometría y con el com-

22. K. v. Fritz ("Gleichheit" p. 474) señala que desde Homero *ison* designaba la igualdad cuantitativa y *hómoion* la igualdad de figura, por lo cual no era de extrañar que Tales empleara este término al hablar de los ángulos de un triángulo.

pás (cf. *Nubes* 177-180 y *Aves* 995-1009) y los documentos que podrían acreditar el uso del compás en la época de Tales,²³ y sobre todo dado el interés con que la tradición nos muestra a Tales por ángulos y triángulos.

Conviene entonces ver más de cerca en qué consiste la demostración deductiva.

4 DEMOSTRACIÓN Y DEDUCCIÓN

Cuando Kurt von Fritz sugiere que los griegos, a partir de Tales, y a diferencia de los egipcios y babilonios, se abocaron a "demostrar todo",²⁴ y que esto Tales pudo intentarlo con el procedimiento del *epharmózein*, se nos suscita una seria duda: ¿no conocían acaso la regla y el compás los egipcios y babilonios? De ser así, ¿cómo sabemos que no tuvieron en absoluto una inquietud como la que se atribuye a Tales, recurriendo para ello al *epharmózein*?

Recordemos la inscripción en la tableta babilónica de la colección Yale N° 7289, en la cual Neugebauer hallaba una antigua aplicación del teorema de Pitágoras. El hecho de que se hayan dibujado en el cuadrado dos diagonales en lugar de una sola, formando así cuatro triángulos rectángulos pequeños (*t*), y no sólo los dos grandes (*T*) que habrían bastado para explicar las cifras escritas, sugiere claramente la comprobación previa de que el cuadrado que se puede construir sobre la diagonal consta de cuatro de esos triángulos *t*, mientras que el cuadrado construido sobre cada uno de los lados consta de sólo dos de los mismos, de modo tal que, si tomamos cada uno de los dos triángulos mayores *T*, hallaremos que el cuadrado construible sobre su hipotenusa (la diagonal del cuadrado) está compuesto por 4 triángulos *t*, y equivale así a la suma de los cuadrados construibles sobre los dos catetos, que estarán compuestos cada uno por 2 de esos triángulos. Todo esto hecho con regla y compás, por medio entonces del *epharmózein*, equivale a una demostración o verificación de lo que numéricamente está expresado en la tableta como resultado de $\sqrt{2}$.

23. Cf. B. Gladigow, "Thales und der Diabétes", en *Hermes* 96 (1968), págs. 264-284, y Ch. Darenberg-E. Saglio, *Dictionnaire des Antiquités grecques et romaines* I 2, c (Paris 1887), págs. 1185-1186, dibujos 1510-1512 (en rigor, Saglio no se atreve a precisar la antigüedad).

24. Platon, *Theaetetus* pág. 71.

Por cierto que, cuando von Fritz dice que los griegos, en tiempos de Tales, trataron de "demostrar todo", quiere decir que su pretensión no se limitaba a estudiar un caso particular sino que tenía en vista *la fundamentación de todo el material que les habían legado egipcios y babilonios*. Ahora bien, esto vale como una descripción genérica de un proceso de dos siglos y medio de duración; pero en cuanto a la parte que a Tales le ha podido tocar en dicho proceso los testimonios no nos permiten decir mucho más que fue quien introdujo en Grecia el interés por los estudios matemáticos (desde Egipto, según Proclo, *In Eucl.* 65,7-8). Tal vez la diferencia mayor con egipcios y babilonios haya sido la de que no tuvo en vista una finalidad práctica, que es lo que subrayan las anécdotas que transmiten Platón y Aristóteles.

Obsérvese que las proposiciones 1 a 34 del libro I de Euclides, aunque en la redacción que éste nos legó se nos presentan deductivamente, pueden resolverse con el procedimiento del *epharmózein*, para avalar el cual ha subsistido en los *Elementos* un axioma: "las cosas que coinciden (*epharmózonta*) una con otra son iguales entre sí" (N.C. 7). Pero con el teorema I 35 ("Los paralelogramos que están sobre la misma base y en las mismas paralelas son iguales entre sí") se introduce la novedad radical de que sólo es posible demostrarlo deductivamente, porque ahora se trata de probar la igualdad de áreas de distinta figura, y esto no se puede resolver con regla y compás, ya que los lados y ángulos de las distintas figuras son distintos (a diferencia de las proposiciones 1-34). Esto significa que, aun cuando se siga un orden de tratamiento en gradual crecimiento de complejidad —que no es sin duda aquel en que históricamente se han presentado los problemas—, llega un momento en que no se puede avanzar más con el simple procedimiento empírico del *epharmózein*.

Más arriba hemos visto, dentro del esquema causal aristotélico aplicado a la matemática, lo que Aristóteles denomina "el existir necesariamente a partir de ciertas cosas" o "lo que, dadas ciertas cosas, se sigue necesariamente". Para simplificar el razonamiento que Heath presume como inherente al difícil ejemplo que aquí pone Aristóteles,²⁵ digamos que, desde el ángulo *A* inscripto en el semicírculo hasta el diámetro de éste, se traza una recta que, de acuerdo con el teorema I 13, debe formar dos ángulos *B* y *C* cuyo valor total es de dos rectos; por otro lado, y como derivación (que no describiremos) del teorema I 32 resulta que

25. Cf. *supra* nota 5.

dichos ángulos *B* y *C* son el doble de *A*. De esto *se sigue necesariamente* que *A* es igual a la mitad de dos ángulos rectos, y a su vez de esto *se sigue necesariamente* que *A* es un ángulo recto. Y hemos dicho más arriba que este *seguirse necesariamente* una proposición de otra u otras constituye la esencia de la deducción.

Por cierto que a veces parecería pensarse en la deducción como un razonamiento connatural al hombre, hasta el punto de que, inclusive cuando alguien como Proclo nos diga sólo que Tales "demostró" algo y nos lo ejemplifique con un procedimiento empírico, se entienda con ello que Tales lo demostró deductivamente. De hecho, sin embargo, como ya ha sido advertido más de una vez, *los primeros testimonios literarios de deducción que poseemos proceden de comienzos del siglo V a.C., más precisamente de Parménides de Elea*.²⁶

A pesar de esto último, existe a menudo una actitud reacia a aceptar lo que es un hecho arqueológicamente indiscutible, y se ha tendido a explicar el uso de la deducción por Parménides como procedente de otros ámbitos. Así, por un lado, desde Cornford hasta Barnes muchos angloparlantes han dado por sentada la influencia en Parménides de "las demostraciones de la geometría" anterior, pitagórica en particular,²⁷ que les permite creer que "no fue el primer pensador que propuso argumentos deductivos",²⁸ pero sin poder nunca justificar tales suposiciones en texto alguno. Y acaso más endeble resulta la tesis de Gigon de que hay que buscar los antecedentes más bien en el campo de la oratoria judicial.²⁹

26. Cf. A. Szabó, "Zum Verständnis der Eleaten" (*Acta Antiqua* II, 1953, págs. 243-289); "Eleatica" (*Acta Antiqua* III, 1955, págs. 67-103, "Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?") (*Acta Antiqua* IV, 1956, págs. 109-151); "Anfänge des Euklidischen Axiomensystems", art. de 1960 incluido en el volumen *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, hrsg. v. O. Becker, Darmstadt, Wiss. Buchg., 1965, pág. 358; W. Burkert, *Wiss.u.W.* 402-3 y *Lore a.Sc.* 425-426.

27. F. M. Cornford, *Plato and Parmenides*, London, Routledge & Kegan Paul, 3a. ed. 1951, pág. 21.

28. J. Barnes, *The Presocratic Philosophers* Vol. I, London, Routledge & Kegan Paul, 1979, pág. 177.

29. O. Gigon, *Der Ursprung der griechischen Philosophie* (Basel, Schwabe, 1945) págs. 251-252. En este último caso, en efecto, no sólo no existen los testimonios que faltan también en el primero (por lo demás, George Kennedy —*The Art of Persuasion in Greece*, London, Routledge & Kegan Paul, 1963, pág. 26— ha mostrado que la retórica judicial en Grecia se ha desarrollado más bien desde mediados del siglo V), sino que el tipo de razonamiento que se pone en juego es muy distinto del empleado en matemática. Como algunos pensadores jurídicos han distinguido, en base a Aristóteles, en el ámbito judicial rige una "lógica de la persuasión" bien diferente de la "lógica de la coerción intelectual"

La argumentación literaria anterior que conocemos tiene características bien diferentes del mecanismo deductivo. Véase por ejemplo el razonamiento de Fénix frente a Aquiles, en *Iliada* IX: no debe tener éste un corazón despiadado, dado que los dioses mismos —que son mayores en excelencia, dignidad y fuerza— son flexibles, y los hombres, cuando se han excedido o equivocado, los conmueven con sacrificios, plegarias y libaciones (496-501). Con mayor razón Aquiles debería ceder, en cuanto Agamenón le ofrece cuantiosas compensaciones por el atropello cometido. Hay acá una cierta lógica argumental, que muestra la razonabilidad de la tesis sustentada, tal como en *Los trabajos y los días* Hesíodo trata de demostrar a Perses que en el mundo tiende a imperar la justicia y que ésta favorecerá a quienes trabajen. Pero no cabe decir que en tales razonamientos anide una fuerza compulsiva intrínseca que desemboque necesariamente en una conclusión, sea ésta aceptada o no en los hechos por el interlocutor.

Ciertamente Parménides compone, como Hesíodo, un poema épico-didáctico destinado a persuadir (escrito además en segunda persona, lo que subraya la índole parenética de su discurso), y en ese sentido echa mano al mito como recurso persuasivo, delatando clara influencia hesiódica. Pero cuando entra de lleno en la exposición de aquello de lo cual quiere persuadir (que el ser —la realidad— existe como presencia plena y permanente) no pone en juego otras motivaciones que no surjan necesariamente por sí solas. Así el ser tiene que ser inengendrado, porque de otro modo "¿que génesis le buscarías? ¿cómo, de donde habría crecido? De lo que no es, no te permito que lo digas ni pienses, pues no se puede decir ni pensar que no sea. ¿Y qué necesidad lo habría impulsado a nacer antes o después, partiendo de la nada? Así es forzoso que exista absolutamente o que no <exista en absoluto>" (fr.8, 6-11). La deducción es aquí, como se ve, indirecta, la del tipo que Aristóteles llama "reducción a lo imposible": se demuestra que es lógicamente imposible lo contrario de lo que se afirma. Que el ser es implica que no ha nacido, pero (y aquí viene la demostración indirecta) si hubiese nacido esto significaría que previamente no existía el ser, y, en ese caso, tendría que

que prevalece en matemática: en la primera valen las apelaciones a los sentimientos, los razonamientos analógicos, etc.; en la segunda sólo el impersonal e inexorable nexo causal (cf. Chaim Perelman, "Raisonnement juridique et logique juridique", y Georges Kalinowski, "De la spécificité de la logique juridique", en *Archives de Philosophie du Droit* N° 11. La Logique du droit, París, 1966, pág. 1 ss.).

haber nacido de la nada, pero, aparte de que sólo puede hablarse de lo que es y no de la nada, ¿qué necesidad lo haría pasar de no ser a ser? Aquí indudablemente Parménides está pensando en lo que vimos Aristóteles llama "lo que se sigue necesariamente de" y lo aplica a la realidad en tanto tal.

Claro que no por eso estamos en presencia de un razonamiento matemático. Ni Parménides parece haber sido matemático, ni siquiera su discípulo Zenón, quien en sus célebres aporías desplegó brillantemente la reducción a lo imposible (fr. 1-3 D-K), con el objeto, según nos lo hace decir Platón (*Parménides* 128c), de demostrar que los opositores de Parménides, al postular el cambio y la multiplicidad, incurrian en insalvables contradicciones.³⁰ Pero lo que queda en claro es que no tenemos testimonios de una matemática deductiva —ni de tipo alguno de deducción— antes de comienzos del siglo V a.C.

Ciertamente, como la obra de los matemáticos anteriores a Euclides se ha perdido, resulta siempre arriesgado atribuir a alguno en particular el primer uso de razonamientos deductivos. Porque si nos atenemos estrictamente a nuestros documentos literarios, cabe señalar que probablemente el primer ejemplo de matemática deductiva con que contemos sea el tan escuetamente presentado en el *Menón* 86e4-87b2: si un área es tal que, aplicada a una línea dada en un círculo dado, es deficiente por un área tal como la que se ha aplicado, puede inscribirse en el círculo como triángulo; si no, no.³¹

Pero el mismo Platón nos habla de Teodoro de Cirene como "el más grande calculador y geómetra" (*Político* 257a-b; cf. *Teeteto* 143d), y el nombre de Teodoro es el más antiguo que nos menciona en conexión

30. Ciertamente ha habido interpretaciones, como la de Helmut Hasse-Heinrich Scholz (*Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, Charlottenburg, Metzner, 1928, esp. págs. 8-12), que incorporan a Zenón "a la historia de la matemática", entendiendo sus aporías como ataques a los "esfuerzos infinitesimales" de los pitagóricos. Pero esta tesis, que en lo que se refiere a esto último ya fue refutada en su momento por B. L. van der Waerden ("Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik", en *Mathematische Annalen* 117, 1940-1941, págs. 141-161, esp. pág. 154 ss.), no ha encontrado seguidores, y en todo caso lo que se admite, de maneras diversas, es la influencia que puede haber ejercido Zenón en las matemáticas (cf. p.e. G.E.L. Owen, "Zeno and the Mathematicians", artículo de 1958 incluido, con algunas correcciones, en R. E. Allen-D. J. Furley, *Studies in Presocratic Philosophy* II, Londres, Routledge & Kegan Paul, 1971, págs. 143-165), que para lo que aquí nos importa más a nosotros es sobre todo metodológica).

31. Cf. R. S. Bluck, *Plato's Meno*, Cambridge 1964, págs. 441-461. Sin necesidad de detallar el razonamiento, el mismo es claramente deductivo.

con la matemática, añadiendo a lo sumo el de Hipias, aunque a éste sin duda Platón no lo calificaría de tal manera (excluimos de esta consideración sus menciones de Tales, no sólo porque no lo relaciona con matemática sino por las razones ya aducidas), ambos situables en el último tercio del siglo V a. C. También Jenofonte, en sus *Memorabilia* (IV 2, 10), menciona a Teodoro como un "excelente geómetra". Varios siglos más tarde, reproduciendo acaso enseñanzas de un neoplatonismo ecléctico, leemos en Jámblico: "Las disciplinas matemáticas (*tà mathémata*) progresaron después de que publicaron sus obras los dos que más las impulsaron, Teodoro de Cirene e Hipócrates de Quíos" (*De Communi Mathematica Scientia* 77,24-78,1 Festa-Klein). Aquí vemos el nombre de Hipócrates, a quien nunca Platón nombra, cosa que sí hace Aristóteles, aunque éste por su parte jamás menciona a Teodoro. Por eso hemos insinuado que la fuente de Jámblico es un neoplatónico ecléctico, como así del pasaje del "sumario" de Proclo (*In Eucl.* 66,4-7) en que también se reúne a ambos como habiéndose hecho "célebres" tras Anaxágoras y Enópides, con el añadido de que Hipócrates cuadró lúnulas y fue el primero que compiló elementos antes de Euclides. Testimonios todos que hablan al menos de la posibilidad de que Teodoro e Hipócrates hayan sido los primeros en emplear la deducción en matemáticas; y además en publicar lo que en ese sentido hicieron. El problema estriba entonces en qué es lo que en ese sentido pueden haber hecho.

En lo que hace a Teodoro, tenemos un pasaje muy difícil y discutido del *Teet.* 147d3-6, que dice así: "en lo concerniente a lados de cuadrados (*dynámeis*)³², Teodoro nos mostró gráficamente

32. Es difícil y discutida la traducción aquí del vocablo *dynamis*. I: L. Campbell (*The Theaetetus of Plato*, Oxford 1861, págs. 19-20), T. Heath (*A History of Greek Mathematics* I, Oxford 1921, pág. 155) y F. M. Cornford (*Plato's Theory of Knowledge*, London 1935, pág. 22), entre otros, traducen "raíz cuadrada" o más precisamente "*surd*" o "raíz cuadrada de número no-cuadrático", versión canonizada por el Liddell-Scott (s.v. IV 2); II: A. Diès (*Platon. Théétète*, Paris, Les Belles Lettres, 1924, pág. 164), W. Knorr (*The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht-Boston 1975) y M. Burnyeat ("The philosophical sense of Theaetetus' Mathematics", en *Isis* 69, 1978, pág. 493 s.) prefieren "poder" o "potencia"; III: A. Szabó (*Anfänge der griechischen Mathematik*, München-Wien-Oldenbourg 1969, pág. 48 = *The Beginnings of Greek Mathematics*, trad. A. M. Ungar, Dordrecht-Boston 1978, pág. 40), "cuadrado"; IV: P. Tannery (*La géométrie grecque*, Paris 1887, pág. 100), B. L. van der Waerden, ("Die Arithmetik der Pythagoreer", 1947-9, pero en un "Apéndice 1963" a la reprod. en el volumen de Becker citado en n. 25, cambia por la versión de Szabó) y M. E. Paoiow ("Die mathematische Theaetetsstelle", en *Archiv for History of Exact Sciences* 27, 1982, pág. 89), "lado cuadrado", que es la que adoptamos nosotros y que es a nuestro juicio lo que se lee inmediatamente después del texto.

(*égraphe*)³³ esto: tanto respecto del <cuadrado> de tres pies <de superficie> cuanto del de cinco pies, hizo ver que no son conmensurables en longitud con el pie <como unidad de medida>, y así tomó separadamente cada uno hasta llegar al de diecisiete pies <de superficie>; y allí de algún modo se detuvo".

Dejamos los problemas referentes a por qué Teodoro empezó por el de tres pies y se detuvo en el de diecisiete. Tratemos de ver qué es lo que pudo hacer cuando "mostró gráficamente" lo que se nos dice que mostró. El texto continúa así (148a6): "cuantas líneas forman un cuadrado de número plano y equilátero las definimos como *mēkos* y cuantas <forman un cuadrado de número> oblongo <las definimos> *dynámeis*". En rigor "equilátero" significa allí "<producto> de factores iguales" y "oblongo" "<producto> de factores desiguales". Los ejemplos numéricos puestos son claros: ni 3 ni 5 ni 17 pueden producirse con dos factores iguales (como $4 = 2 \times 2$ o $9 = 3 \times 3$) sino sólo con dos factores desiguales ($3 = 3 \times 1$, etc.). En términos de "mostrar gráficamente", esto viene a querer decir que, para construir un cuadrado de 3 pies, hay que construir un rectángulo de esa superficie (o sea, de 3 pies de largo y 1 de ancho) y luego transformarlo en cuadrado. Para hacerlo hallamos en Euclides dos procedimientos: el más clásico (VI 13) es el único que hallamos en Aristóteles (*De Anima* 413a), y consiste en hallar una "media proporcional" entre las dos rectas del rectángulo; pero dado que esto supone la teoría de las proporciones de Eudoxo, es más razonable pensar que Teodoro usó II 14, típico teorema de "aplicación de superficies", por el cual, dado un rectángulo, se puede construir un cuadrado de la misma área. En cualquiera de los dos casos sólo se puede proceder deductivamente, ya que, como dijimos antes, si se trata de figuras distintas no puede aplicarse el *epfarmózein*.³⁴

En lo concerniente a Hipócrates de Quíos, si bien la referencia más antigua, la de Aristóteles, es más escueta y vaga que la de Platón acerca

33. Aquí las traducciones divergen entre la más literal "dibujó" y la más interpretativa "demostró". Lo que resulta claro es que, si "*nos dibujó*" algo, fue para "mostrarnos" o "demostrarnos" algo; Szabó decía en la versión alemana "*zeichnete uns*" (nos dibujaba) y pasa luego, en la traducción inglesa, a "*was drawing [...] to demonstrate to us*" (dibujaba [...] para demostrarnos).

34. En esta reconstrucción del procedimiento de Teodoro nos inspiramos en Szabó (*Anfänge* págs. 43-79), con algunas diferencias que no es el caso de detallar acá, pero que no hacen a la forma de traducir *dynámeis* (cf. nota 32), en lo cual creemos que la versión que adoptamos nosotros se ajusta más incluso a tal reconstrucción.

de Teodoro (*Soph.Elench.* 171b: "la cuadratura <del círculo> de Hipócrates por medio de lúnulas"), tenemos en compensación una extensa descripción de Simplicio del procedimiento que, según Eudemo, usó para eso Hipócrates; aunque Simplicio encuentra que el de Eudemo es un "resumen conciso, según la costumbre antigua", y avisa que ha de "añadir unas pocas cosas a partir de los *Elementos* de Euclides", de modo que, independientemente de la confianza que nos merezca el testimonio de Eudemo (fr. 140 Wehrli = Simpl., *In Phys.* 60,22-68,32), la euclideanización del relato impide tomarlo como fidedigno, especialmente cuando implica nada menos que XII 2, esto es, el denominado "método de exhaustión", que Arquímedes atribuye a Eudoxo.³⁵ Tal vez sea correcta la sugerencia de Heath de que, más modestamente, Hipócrates pudo haber procedido en forma similar a la atribuida al sofista Antifonte, "cubriendo" gradualmente los círculos con polígonos, y "llegando al límite".³⁶ En cualquier caso, los testimonios indican, con alto grado de probabilidad, un empleo de razonamiento deductivo y también, como en el caso de Teodoro, una cierta familiaridad con problemas relacionados con la irracionalidad de determinadas líneas, como la diagonal del cuadrado o la circunferencia, incluyendo seguramente un manejo deductivo del "teorema de Pitágoras". Esto, como decimos, en el tercer tercio del siglo V a.C.

5. DEDUCCIÓN Y FUNDAMENTACIÓN AXIOMÁTICA

Ciertamente, el uso de la argumentación deductiva exige no sólo que se vaya a parar a la conclusión de una manera necesaria, sino también que el punto de partida aparezca por sí mismo necesario. Porque, aunque la deducción en sí misma consista sólo en el "se sigue necesariamente", para que tenga fuerza lógica real lo que se sigue debe seguirse de algo cuya aceptación sea también necesaria. Si no fuera así, habría tenido que ser demostrado previamente, y en ese caso seguirse a su vez de otra cosa de aceptación necesaria.

En el caso de Parménides, hay algo cuya aceptación con carácter de necesario parece requerirse para efectuar todo el razonamiento: "es

35. Cf. Eudoxo fr. 59a, b y c en F. Lasserre, *Die Fragmente des Eudoxos von Knidos* (Berlin 1966, págs. 30-31).

36. Heath, *A History I* pág. 328.

o no es" (fr. 8,16, cf. 8,11), o sea, lo que modernamente se llama "principio del tercero excluido", principio complementario del de "no contradicción", al que Aristóteles no sólo incluye entre los primeros *axiómata* de la ciencia (*Met.* IV 3-4) sino que califica como "verdad última a la que se remiten todos los que demuestran, pues es por naturaleza un principio, inclusive de todos los demás axiomas" (*ib.* 1005b32-34). Y es innegable que también este principio está implícito en el poema de Parménides, subyacente al del tercero excluido. Claro que la aceptación plena de sus razonamientos parecería tener que incluir una definición del concepto de "ser", y en ese sentido no queda claro si ésta emerge de las características ("inengendrado", "imperecedero", etc.) que se demuestran por "reducción a lo imposible" o si se halla implícita previamente a tales demostraciones. Es indudable, en todo caso, que dicha definición requería una complicada elaboración que debió esperar hasta Platón y Aristóteles, quienes entendieron que la validez de los razonamientos parmenídeos se limitaba a una definición del "ser" como absoluto, mas no a cualquier tipo de "ser".

Lo que de cualquier manera se hace manifiesto es que el mismo Parménides enlazó sus razonamientos deductivos con una premisa inicial cuya verdad era para él tan necesaria como la que presidía la concatenación argumental, se debiera a una revelación de una diosa o al carácter de evidente que sintió en ella.

En ese sentido resulta altamente probable que tanto Teodoro como Hipócrates, si efectivamente emplearon el razonamiento deductivo en matemáticas, hayan partido de premisas que pudieran contar por sí mismas con aceptación, por resultar evidentes. Pero esto no puede pasar de ser una conjetura, ya que nuestros testimonios sobre los procedimientos de ambos geómetras son demasiado precarios como para concluir otra cosa que la mera posibilidad y la mera probabilidad de un uso de la deducción, a partir de premisas que ellos pueden haber aceptado pero cuyo grado de evidencia por entonces desconocemos.

Existen razones, con todo, para sospechar que no hubo, anteriormente a Platón y Aristóteles, una conciencia de la necesidad de partir de premisas evidentes (es decir, de la necesidad de axiomatización), que condujera a una cierta "reglamentación" de estas premisas y de allí, progresivamente, a su sistematización.

La primera razón es, a nuestro juicio, el conocido despliegue de una argumentación erística, por parte de muchos o algunos de los sofistas, que no sólo adolecía a menudo de fallas en el mecanismo de concatenación argumental sino que también solía caracterizarse por partir de pre-

misas erróneas (y que, al decir de Aristóteles, parecían probables sin serlo). Este hecho, testimoniado juntamente con la batería desplegada por Platón y sobre todo por Aristóteles para contrarrestarlo, acredita que, al menos hasta los albores del siglo IV a.C., el uso riguroso de la deducción se hallaba en pañales y más aún su fundamentación axiomática. Precisamente la fundación de la Academia platónica parece haberse dirigido primordialmente a sustraer la discusión filosófica y científica a la inorgánica disputa del ágora, en la que los incautos quedaban a merced de los erísticos, y trasladarla a un ámbito en que pudiera tomarse en diálogo serio y pautado. La vigencia de reglas de juego, que es algo común a los conceptos de "dialéctica" tan diferentes que manejaron Platón y Aristóteles (de las cuales hay una básica, que se advierte ya en los diálogos socráticos de Platón: la de no avanzar en la discusión si no se cuenta con el acuerdo del interlocutor), ha influido sin duda en los jóvenes matemáticos que ingresaron en la Academia para poner en práctica en su ámbito específico similares pautas organizativas (lo cual produjo inclusive una transferencia terminológica desde la dialéctica de los filósofos a las matemáticas).³⁷ Aunque no les bastó ya para ello la aquiescencia del interlocutor en la aceptación de las premisas, sino que se requirieron otras condiciones, como las que aparecen enumeradas, por primera vez en los *Segundos Analíticos* (I 2).

La segunda razón es la de que no parece posible que haya habido una axiomatización mínimamente orgánica antes de que se manejaran los axiomas euclideos de igualdad (especialmente las Nociones Comunes 1 a 3), y éstos, si se exceptúa la empírica N.C. 7 que vimos fundamenta al *eparmózein*, contienen una concepción de igualdad abstracta que no hallamos testimoniada antes del *Fedón* 74a-c. Allí Platón habla de lo "Igual en sí" (o "las Cosas Iguales en sí", ya que hablar de igualdad exige por lo menos dos cosas), que no es aprehensible sensorialmente, a diferencia de las cosas visibles que decimos "iguales", como dos leños o dos piedras.

Nótese que el mismo Platón, en el juvenil diálogo *Eutifrón*, da una definición de "par" e "impar" como si fuera ya conocida (o sea, como circulante en las matemáticas de ese momento), según la cual el primero es "un número isósceles" y el segundo "escaleno" (12d); y esto implica una concepción geométrica empírica distante aún de Euclides VII def. 6

37. Hemos desarrollado este tema en el artículo citado en nota 6, especialmente pág. 42 ss.; *infra* pág. 91 ss.

("par es un número divisible en dos <partes iguales>"), que más tarde demostrará conocer Platón, en *Leyes* X 895e. A nuestro juicio, esto significa que, sólo a partir de la madurez de Platón y de la fundación de la Academia durante ésta, tenemos documentados avances en la axiomatización de las matemáticas, incluyendo un concepto supraempírico de igualdad que la sustentara.

Claro está que, si se acepta nuestro anterior intento de reconstrucción del procedimiento de Teodoro de Cirene para demostrar la inconmensurabilidad de las líneas —con la unidad de medida— con que se construyen los cuadrados "oblongos", se debe aplicar el teorema II 14, que, como todas las proposiciones que hallamos en Euclides a partir de I 35, no pueden demostrarse con regla y compás (por tratarse de comparación de figuras distintas) sino deductivamente. Y esto supone que se maneja un concepto de igualdad menos empírico que el implicado en la N.C. 7. Aquí, más allá del problema de lo conjetural de nuestra reconstrucción y de que tengamos que manejarlos más con supuestos probables que con hechos verificados, debemos señalar que *no creemos que Platón haya inventado el concepto de igualdad que formula en el Fedón*, sino que *lo toma precisamente de la matemática de su tiempo*. Si fuera cierto lo que recoge (¿de Hermodoro?) Diógenes Laercio III 6 en el sentido de que, después de la muerte de Sócrates y antes de ir a Italia, Platón visitó a Teodoro en Cirene, no sería extraño que le hubiese llamado la atención un manejo conceptual que no sólo se avenía mejor con el tipo de razonamiento que la filosofía conocía desde Parménides sino también con la tendencia socrático-platónica a elevarse por encima de lo sensible. Y en consecuencia tampoco sería extraño que hubiese detectado en Teodoro (y, si no, un poco más tarde en Arquitas) un concepto de igualdad que se compaginaba al máximo con su búsqueda de la perfección que iba a consolidarse filosóficamente con la teoría de las Ideas.

Pero no sucede sólo que sea en Platón donde hallamos por primera vez testimoniado tal concepto de igualdad, sino que, aunque haya sido empleado por los matemáticos antes que él hablara del mismo, la explicitación platónica debe haber sido tan decisiva en este punto como lo fue, en lo concerniente a la mencionada "reglamentación" de los principios axiomáticos, la explicitación de Aristóteles en los capítulos 2 y 10 del primer libro de los *Segundos Analíticos*. Al respecto, la información de Proclo sobre los avances matemáticos realizados en el marco de la Academia, en particular las compilaciones de elementos como la de León y sobre todo la de Teudio de Magnesio (*In Eucl.* 66,14-68,20), si es correcta, se condice muy bien con lo que sostenemos.

¿Cuándo comenzó entonces la matemática científica? ¿Con el uso de la demostración empírica como la que cabe atribuir a Tales? ¿Con el recurso post-parmenídeo a la deducción, tal vez con Teodoro de Cirene e Hipócrates de Quíos? ¿O con éstos, en la medida que han podido partir, en sus razonamientos, de principios axiomáticos? ¿O sólo a partir del momento en que, basándose en la búsqueda de pautas para la argumentación en la Academia platónica, se sistematiza la fundamentación axiomática de los razonamientos matemáticos?

De acuerdo con lo dicho hacia el comienzo de este artículo, si el criterio que empleamos es el de "fecundidad" científica, debemos conceder razón a quienes postulan la prueba deductiva como la instancia cuyo surgimiento es decisivo para el avance de la matemática. Sin duda que también es de suma importancia para el establecimiento de la matemática como ciencia la sistematización axiomática, pero esa importancia sólo es decisiva si se prioriza el criterio de "organización" (o el de "rigor") de los conocimientos sobre el mencionado de "fecundidad". Pero tales otros criterios, como hemos visto, no son suficientes para diferenciar lo "científico" de lo "extra-científico" y "pre-científico" y explicar el desarrollo evolutivo del primero de tales ámbitos.

De este modo, el hito que separa la matemática científica de la pre-científica no consiste en la fundación de un sistema axiomático-deductivo (fundación, por lo demás, en una dinámica casi constante, ya que ni Euclides la inventó de golpe sino que más bien recopiló lo que era producto de más de un siglo de esfuerzos, ni la produjo para toda la eternidad, aunque hayan pasado unos cuantos siglos hasta que se propusieran correcciones o alternativas).

Y tampoco consiste en el supuesto intento de Tales de demostrar — todo lo que se le ocurriera— empíricamente, ya que los alcances del *eparmózein* son claramente limitados y además obligadamente aislados. Sí lo es, en cambio, la aplicación de la prueba deductiva a las matemáticas, en algún momento entre el poema de Parménides (490/480 a.C.) y el *Menón* de Platón (390/380 a.C.), que muy bien puede haber sido entre los años 430 y 400, con los trabajos de Teodoro de Cirene e Hipócrates de Quíos. Ciertamente, como hemos dicho, nuestra presunción de que en dichos trabajos se halla una verdadera prueba deductiva presupone algunos principios axiomáticos de igualdad abstracta, como las Nociones Comunes de Euclides 1 a 3 (la última de las cuales —que implica a las otras dos— es citada por Aristóteles, p.e. *Seg. Anal.* I 10, 76a41, "cuando se sustraen cosas iguales a cosas iguales, las cosas restantes son iguales"). Pero no exige, en cambio, una organización sistemática de estos

principios, aunque Proclo recoja la versión de que Hipócrates "fue el primero de quien se tiene mención que haya compuesto un libro de elementos" (*In Eucl.* 66,7-8). Tal vez esa organización sistemática no haya existido hasta Teeteto y Eudoxo, con los trabajos del primero sobre las líneas irracionales y del segundo con su teoría de la proporción, que permitieron dominear matemáticamente el ámbito de la irracionalidad.³⁸

38. Este trabajo ha sido redactado en base a las notas de clase de un cursillo dado lado en el Departamento de Filosofía de la Facultad de Letras de la Universidad Autónoma de Barcelona, entre enero y marzo de 1988, en el marco del programa de sabáticos del Ministerio de Educación y Ciencia de España.

II. EUDEMO Y EL "CATÁLOGO DE GEÓMETRAS" DE PROCLO*

El propósito del presente trabajo es el de someter a revisión el tema de las fuentes y carácter del llamado "catálogo de geómetras" o "sumario" de Proclo, que ocupa alrededor de cinco páginas del comentario de éste al primer libro de los *Elementos* de Euclides (*In pr. Eucl.*, ed. G. Friedlein).

"En un tiempo", dice Heath,¹ "era llamado con frecuencia el 'sumario de Eudemo', con la suposición de que se trataba de un extracto de la gran *Historia de la geometría* en cuatro libros de Eudemo, el discípulo de Aristóteles". Tras un sucinto estudio del asunto, Heath arriba a la conclusión de que es "probable que el cuerpo del sumario haya sido tomado por Proclo de un compendio hecho por algún escritor posterior a Eudemo, si bien la primera parte está basada, directa o indirectamente, en datos de la *Historia* de Eudemo".²

Resulta sorprendente advertir cuán profunda es, todavía en la actualidad, la confianza en que el "sumario" de Proclo descansa, en última instancia, en una "historia de la geometría" escrita por Eudemo.

Para dar el ejemplo acaso más revelador, Fritz Wehrli, quien ha confeccionado la más moderna y cuidadosa recopilación de los fragmentos de Eudemo,³ incluye en ella (como un extenso fragmento 133) el "sumario" de Proclo, aun cuando en éste no se menciona en absoluto el nombre de Eudemo. Si tenemos en cuenta que se trata del único caso en que eso sucede en su recopilación (Wehrli excluye dos famosos pasajes

*Publicado por primera vez en *Emerita* 53,1 (1985), Madrid, págs. 127-157.

1 T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. I, Oxford 1921, reimpr. 1955, pág. 118.

2 *Idem*, pág. 120.

3 F. Wehrli, *Die Schule des Aristoteles*, VIII. *Eudemos von Rhodos*, Basilea 1969₂.

de Proclo referidos a Tales⁴ —considerados habitualmente como parte de la *Historia de la geometría* de Eudemo—,⁵ aparentemente por el hecho de que en ellos Proclo no se remite a Eudemo), no queda otra explicación que la de que se trata de una *communis opinio* a la que Wehrli se atiene.

Y en efecto, Wehrli no da razón alguna de la inclusión del "catálogo de geómetras como fr. 133 de Eudemo (más particularmente, de su *Geometrikè historia*). Se limita a decir: "generalmente se supone, con derecho, que el material de este bosquejo histórico, en su mayor parte, emana de Eudemo".⁶

Dicha *communis opinio* está ligada a otra: la de que Aristóteles distribuyó entre sus discípulos la tarea de confeccionar "historias" en los distintos campos del saber. La primera vez que fue formulada semejante idea —hasta donde hemos rastreado el asunto— ha sido en un artículo de 1893 de Hermann Diels, en el cual leemos: "Así Teofrasto —para citar algunos ejemplos— compuso la historia de la filosofía en los 18 libros de sus *Physikôn dóxai*, de cuya concepción y material depende toda la tradición posterior; así se convirtió Eudemo en el historiador de la teología y a la vez de las ciencias exactas, o sea, de la aritmética, la geometría y la astronomía. ¡Cómo habría entonces de faltar la medicina en la enciclopedia del Peripato!"⁷

Palabras análogas hallamos en Wehrli: "Los fragmentos 133 a 150⁸ pertenecen, junto con las *Physikôn dóxai*, y con la *Historia de la medicina* de Menón, a la realización del plan aristotélico de tornar fecundos para la propia investigación los momentos anteriores del desarrollo del conocimiento humano".⁹

4 *In pr. Eucl.* 157, 10-13 y 250, 20 - 251, 2. Cf. *Eudemos*, pág. 115.

5 P. e. B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft* (trad. alemana H. Habicht, Basilea-Stuttgart 1956, págs. 143-145. Cf. su art. de 1957 "Die Beweisführung in den klassischen Wissenschaften der Altertums" (incluido en la recopilación de H. -G. Gadammer, *Um die Begriffswelt der Vorsokratiker*, Darmstadt, WdF 9, 1968), págs. 45-48.

6 *Eudemos*, p. 134.

7 H. Diels, "Ueber die Excerpte von Menons Iatrika", en *Hermes* 28, 1893, pág. 409. Cf. W. Jaeger, *Aristoteles*, Berlin 1955, págs. 358-359. Hay traducción española de José Gaos, *Aristóteles*, México 1946, págs. 384-385.

8 Wehrli clasifica los fr. 133-141 II dentro de la "historia" de la geometría, el fr. 142 en la de la aritmética, los 143-149 en la de la astronomía, y el 150 —con dudas— en la de la teología.

9. *Eudemos*, p. 113.

Pero no vemos tal tesis respaldada por ninguna de las biografías antiguas de Aristóteles recopiladas por Ingemar Dühring,¹⁰ ni por ninguna otra fuente que pudiera sacarla de la fantasía romántica.

Sobre el concepto de "historia de las ideas" en Grecia, ha sido decisivo el estudio realizado por el profesor Harold Cherniss, quien, particularizando con Platón, Aristóteles y sus discípulos, dice:

"Platón y Aristóteles no se ocuparon de la historia del pensamiento en tanto historia (...) Se ocuparon de algo distinto: de la naturaleza de la verdad objetiva, de las ideas o universales —que no tienen historia—, y no de los intentos particulares de seres humanos particulares por formular, en sus pensamientos o en sus discursos, la naturaleza de esta verdad eterna. Cuando ellos buscaron —cada uno a su manera— formular la naturaleza de esta verdad, o indicar el procedimiento por el cual podía ser captada (porque los escritos de Platón, al menos, tenían más bien el segundo propósito que el primero), hicieron uso, ciertamente, de nombres y formulaciones históricos. Pero los usaron como material que debía ser reestructurado por su método dialéctico, no con la intención de rastrear con exactitud el curso particular que pensaban habían tomado en el pasado, sino con la de obtener, de estas manifestaciones particulares imperfectas, los aspectos típicos o universales: Platón, forjando un panorama ideal de la filosofía, cuyos momentos deben estar siempre presentes en el pensamiento humano, tal como el problema de lo uno y lo múltiple —dice—¹¹ es una afección inmortal y sin edad del discurso humano, que no ha tenido comienzo ni tendrá fin jamás; Aristóteles, remodelando el material histórico tal como lo remodela la tragedia con el fin de decir no lo que ha pasado, sino lo que puede pasar; por lo cual es más filosófica que la historia.¹² La posibilidad misma de lo que denominamos historia de las ideas habría parecido a Aristóteles, no menos que a Platón, incompatible con la filosofía, que para ellos implicaba una verdad objetiva y eterna, discernible directamente por cada mente humana individual. Algo de esta actitud fue característico de todo el pensamiento filosófico griego".¹³

10. I. Dürring, *Aristotle in the Ancient Biographical Tradition*, Göteborg 1957.

11. Nota 69 al pie de página = "*Filebo* 15 d".

12. Nota 70 al pie de página = "*Poética* 1451 b 4 ss."

13. "The History of Ideas and Ancient Greek Philosophy", art. de 1953, incluido ahora en H. Cherniss, *Selected Papers*, ed. L. Tarán, Leiden 1977, p. 58-59.

Por cierto que Cherniss participa en la *communis opinio* de que los "discípulos o asociados" de Aristóteles "en el Liceo fueron animados o tal vez incitados por él a emprender investigaciones históricas en muchos campos, entre las más famosas e influyentes de las cuales han estado la *Historia de la música* de Aristóxeno, la *Historia de la matemática* de Eudemo y la *Historia de la filosofía de la naturaleza* de Teofrasto". Pero añade: "Mucho de esta obra peripatética estaba compuesto en forma de anales o de lo que nosotros llamaríamos recopilaciones de material para la historia, más que escritos históricos".¹⁴

Por lo demás, sabemos que el procedimiento privilegiado en el Peripato era la clasificación, que podemos advertir en los libros de Teofrasto sobre las plantas, sobre los vientos, etc. Pero también en la reconstrucción que hace Diels de las *Physikón dóxai*, donde hallamos las presuntas tesis de los presocráticos, clasificadas según la respuesta que supuestamente han dado a preguntas tales como "¿Cuál es la *physis*?" o "¿Cuál o cuáles son las *archai* y los *stoicheîa*?".¹⁵ Y como los conceptos de *physis*, *arché* y *stoicheîon* que se sobreentiende en las preguntas y respuestas son de cuño notoriamente aristotélico, está claro que se trata de preguntas que los presocráticos no han podido formularse nunca, y que lo que Teofrasto toma como respuesta a las mismas son frases — cuyo texto original, cuando ha existido, y su verdadero sentido sólo podemos conjeturar — peripatéticamente distorsionadas.

En lo que concierne a la *Historia de la geometría* de Eudemo, el mismo Fritz Wehrli nos aclara: "El material no estaba ordenado por autores, sino según la aparición y desarrollo de los pensamientos rectores; de este modo, cada problema particular podía quedar anudado con distintos autores, y, por otro lado, el tratamiento de cada autor quedar repartido según ámbitos temáticos".¹⁶ Vale decir, no había un tratamiento histórico, sino una clasificación de autores por tópicos geométricos (teoremas y problemas sobre ángulos y triángulos, aplicación de superficies, cuadratura del círculo, duplicación del cubo, líneas irracionales). No conocemos el criterio con el cual Eudemo puede haber ordenado los tópicos; pero en todo caso, lo más probable era que, como dice Wehrli, el nombre de un autor apareciera en el tratamiento de distintos problemas (que no es lo que hace el propio Wehrli, cuando ordena los frag-

14. Art. cit., p. 56.

15. H. Diels, *Doxographi Graeci*, Berlín 1879, reprod. 1958, p. 274 ss.

16. *Eudemos*, p. 113.

mentos —del núm. 134 al 141 II—.según los nombres de autores, que pone en una sucesión tentativamente cronológica: Tales, "pitagóricos", Enópides, Hipócrates y Antifonte, Arquitas y Teeteto).

Cabe añadir que el anudamiento de tópicos con autores aparece, en los fragmentos recopilados por Wehrli, de una forma generalmente vaga e imprecisa. Así, por ejemplo, cuando Proclo (*In pr. Eucl.* 352, 14-18) afirma que "Eudemo atribuye a Tales" el teorema I 26 de Euclides, "ya que dice que es necesario hacer uso de él por el modo en que se cuenta que calculó la distancia de las naves en el mar", vemos que hasta Proclo ha llegado una tradición según la cual hasta Eudemo llegó una anécdota según la cual Tales calculó la distancia de las naves en el mar, y eso ha hecho suponer a Eudemo que Tales conocía dicho teorema. O bien, cuando también según Proclo (*id.* 419, 15-24), Eudemo atribuye descubrimientos a la Musa de los pitagóricos—"aquellos divinos varones de antaño"—, no sabemos si se trata de aquellos "pitagóricos" que Platón menciona como contemporáneos suyos (*Rep.* VII, 530 c; cf. X 600 b), u otros más antiguos, ni de quiénes se trata.

Antes de abordar más directamente el "sumario" de Proclo y el problema de su autoría y fuentes, haremos una observación semántica. El nombre que la obra de Eudemo sobre tales tópicos geométricos recibe, en Eutocio y en Simplicio, es *Geometrikè historía* (Proclo la menciona una sola vez en plural: *Geometrikai historíai*). Este título suele ser traducido *Historia de la geometría*, lo cual nos parece incorrecto. Tenemos, en efecto, cuando menos dos obras peripatéticas en que hallamos el término *historía* en el título, y en ambos casos con total certeza de que no significa historia": la *Zoikè historía* o *He historía he perì tà zóia* (*Historia Animalium*), atribuida a Aristóteles mismo, y la *Perì phytôn historía* (*Historia Plantarum*) de Teofrasto. En tales casos se admite que el significado del término es "investigación", o bien "relato", "narración" o "informe" (de lo investigado). ¿Por qué debemos suponer que tiene otro significado en el caso de la peripatética *Geometrikè historía* de Eudemo?

En lo que a Proclo concierne, parece claro que usa el término, —dentro y fuera del "sumario"— en el sentido de "narración" o "relato",¹⁷ Antes del "catálogo de geómetras", lo emplea en un pasaje (38, 18 ss.) en el cual la expresión *oúte tò historikòn oúte tò iatrikòn* nos muestra que pone en un mismo nivel *tò iatrikòn* (lo concerniente a la *iatriké*) y *tò*

17. Proclo caracteriza así la *historía*: *ho mèn gàr tòi lógoi tà érga tôn ariston aphegoúmenos historían syntithesin* (*In Plat. Tim.* I 65, 18-20 Diehl).

historikòn (lo concerniente a la *historía*), y por lo tanto, coloca en un mismo plano la *iatriké* con la *historía*, o sea, trata a ambas como ciencias o técnicas; por lo cual cabría esperar que el vocablo *historía* se refiriera allí a la "historia" que hoy consideramos ciencia. Pero el contexto nos muestra otra cosa: se habla de "algunos" ("como Gémino") que "estiman que no debe decirse que la Táctica es una parte de la Matemática", y se añade: "y mucho menos *tò historikòn* ni lo concerniente a la medicina son parte de la Matemática. aun cuando los que escriben *tàs historías* con frecuencia se sirven de los teoremas matemáticos, ya sea al indicar la situación de las regiones, ya sea al calcular el tamaño, el diámetro y el perímetro de las ciudades". Como se ve, la técnica o habilidad concerniente a la *historía* es una aptitud o arte narrativa o descriptiva, en todo caso, pero tiene poco en común con la que hoy requerimos de los "historiadores", aunque podría abarcar indudablemente a muchos escritores del período helenístico (p. e. los redactores de "Misceláneas", o de "Historias naturales", como Plinio, o de "Historias varias", como Eliano.

Y el uso que Proclo hace del correspondiente verbo, *historéo* (dos veces en el "sumario"; pero, fuera del mismo, véase p. e. 111, 22 y 113, 6-8), muestra que no se lo puede traducir de otro modo que "narrar", "relatar" o "describir". os

II

Para un adecuado análisis del "sumario" que hallamos en el "Prólogo II" del comentario de Proclo, presentaremos su traducción dividida en párrafos, según el procedimiento que ya siguió Paul Tannery,¹⁸ quien asignó además a cada párrafo una letra del alfabeto francés (como nos ajustaremos a tal subdivisión, no se hallarán las letras ch, ll ni ñ).

Con Tannery, entendemos que el "sumario" comienza en p. 64, 7 de la edición de Friedlein, y no en el pasaje 64, 16 en que lo hace empezar Wehrli. Asimismo, mientras para Wehrli el fr. 133 de Eudemo concluye en p. 68, 6 (porque lo que sigue —"no mucho más reciente que ellos [sc. Hermótimo y Filipo] es Euclides"— entiende Wehrli que no podría provenir de Eudemo, por razones cronológicas), Tannery prolonga su traducción hasta p. 70, 18, donde efectivamente acaba el "sumario". Noso-

18. P. Tannery, *La géometrie grecque*, París 1887, p. 66-70.

tros compartimos la elección de Tannery, pero llegaremos hasta p. 69, 9, ya que lo que resta del "sumario" no interesa para el análisis presente.

Dejemos ahora hablar al texto:

- a* = 64, 7-17 Ahora debemos hablar sobre el nacimiento de la geometría en el período actual. El divino¹⁹ Aristóteles, en efecto, ha dicho que las mismas opiniones ocurren a los hombres muchas veces conforme ciertos períodos regulares del universo. Las ciencias no han alcanzado su constitución por primera vez entre nosotros o entre hombres conocidos por nosotros, sino que también han aparecido y después desaparecido en todos aquellos ciclos, incontables, que han tenido lugar y que, a su turno, tendrán lugar. Ahora bien,²⁰ puesto que debemos examinar los comienzos de las técnicas y de las ciencias en el presente período,
- b* = 64, 17-23 diremos, junto a lo que ha sido narrado²¹ por la mayoría, que la geometría fue descubierta primeramente por los egipcios, y que debió su origen a la medición de las tierras. Tuvieron necesidad de ella, en efecto, a causa de las crecidas del Nilo, que borraban los límites propios de cada lote.
- c* = 64, 23-65, 7 No es asombroso que el descubrimiento de esta ciencia y el de las demás haya surgido a partir de la necesidad, puesto que todo lo que se mueve en el devenir avanza desde lo imperfecto hacia lo perfecto. Resulta así natural el tránsito desde la percepción hacia el razonamiento, y desde éste hacia la intelección. Tal como el conocimiento exacto de los números debió su origen al comercio e intercambio entre los fenicios, así también la geometría fue descubierta por los egipcios por la causa mencionada.
- d* = 65, 7-11 Tras viajar a Egipto, Tales fue el primero que introdujo en Grecia este estudio; él mismo hizo muchos descubrimien-

19. No traducimos *daimónios* por "inspirado", como se hace habitualmente, sino por "divino" (similarmente Proclo aplica el epíteto *theos* a Platón).

20. Con estas palabras Wehrli hace comenzar el fr. 133 de Eudemo. Pero, sin las líneas precedentes, resulta difícil entender a qué se refiere Proclo cuando dice "en el presente período".

21. "Ha sido narrado" = *históretai*.

tos y mostró a sus sucesores los principios de muchos otros, procediendo en unos casos de un modo más general, en otros de un modo más sensible.

- e = 65, 11-15 Después de él Mamerco,²² hermano del poeta Estesícoro, es recordado por haberse aplicado al estudio de la geometría; también Hípias de Elis ha narrado²³ cómo aquél adquirió reputación en geometría.
- f = 65, 15-21 Tras éstos,²⁴ Pitágoras transformó la filosofía que trata de la geometría²⁵ en una forma de educación libre,²⁶ examinando sus principios desde lo supremo e investigando los teoremas de modo inmaterial e intelectual. Él fue quien descubrió el tratamiento de los irracionales y la construcción de las figuras cósmicas.
- g = 65, 21-66, 4 Después de él el clazomenio Anaxágoras se aplicó a muchas cuestiones que corresponden a la geometría, así como Enópides de Quíos, quien era un poco más joven que

22. Seguimos la lectura de Friedlein, quien hace notar que el léxico bizantino *Suda* (*ad Stesichoros*) menciona a "Mamertino" como hermano de Estesícoro, y piensa que de tal nombre puede haber derivado "Mamerco". Claro que, como el *Suda* es posterior a Proclo, la derivación podría haber sido inversa. En los MSS. hay también otras lecciones, como "Mamercio" y "Ameristo", pero tales nombres nos son tan igualmente desconocidos como "Mamerco".

23. "ha narrado" = *históresen*.

24. Al comentar esta parágrafo, C. J. de Vogel (*Studies in Greek Philosophy*, Assen 1970, p. 88) dice: "*epi toutois*, que obviamente no significa 'después de éstos' sino 'además de ellos'. Y Pitágoras es mencionado 'además de ellos', porque hay algo peculiar en el modo en el cual abordó estos estudios". Pero la cosa no parece tan obvia: ¿por qué no "después de éstos"? (Tal vez C. J. de Vogel ha pensado que "éstos" abarca también a Hípias, pero eso sí parece obvio que no.) Más abajo, cuando leemos que "Platón apareció *epi toutois* (sc. Hipócrates y Teodoro)", no tendría sentido traducir "Platón apareció además de ellos".

25. Ya Platón, en *Teeteto* 143 d, habla de la "geometría o alguna otra filosofía"; y para Aristóteles la matemática es una "filosofía teórica" (*Met.* VI 1026 a). Ése parece ser el sentido de la frase de Proclo.

26. Traducimos literalmente *eleuthérios* por "libre" (como Paul ver Eecke, *Proclus de Lycie*, Brujas 1948, p. 57 y n. 2; aunque no, ciertamente, por las razones que éste da sobre lo presuntamente aprendido por Pitágoras durante su "cautiverio en Babilonia", que contrapone a una "educación libre"), y no por "liberal", en base al contraste que hace Aristóteles —y que creemos presente en estas dos palabras— entre "necesidad" y "libertad", aplicado a su teoría de la educación (*Política* VIII 3, 1338 a).

Anaxágoras. Platón los menciona en los *Rivales* como si hubieran alcanzado fama de matemáticos.

$h = 66, 47$

Tras éstos se hicieron célebres en geometría Hipócrates de Quios —quien descubrió la cuadratura de la lúnula— y Teodoro de Cirene. Hipócrates fue el primero de quien se tiene mención que haya compuesto un libro de elementos.

$i = 66, 7-14$

Tras éstos hizo su aparición Platón, quien produjo el mayor avance en la geometría y en las demás ciencias matemáticas, debido a su preocupación por ellas. También es manifiesto que condensó en sus escritos conceptos matemáticos, y que en todas partes despertó por estas cosas admiración entre los que se han ocupado de la filosofía.

$j = 66, 14-67, 1$

En este tiempo vivieron también Leodamas de Tasio, Arquitas de Tarento y Teeteto de Atenas, con quienes aumentó la cantidad de teoremas y se avanzó hacia una construcción más científica. Más joven que Leodamas era Neoclides y también el discípulo de éste, León, quienes añadieron muchas soluciones a los problemas anteriores a ellos, de modo tal que León pudo compilar elementos de un modo más cuidadoso en cuanto a la cantidad y a la utilidad de las proposiciones demostradas. También descubrió las "delimitaciones", para saber cuándo es posible resolver el problema que se investiga y cuándo es imposible.

$k = 67, 2-8$

Eudoxo de Cnido, un poco más joven que León, se convirtió en miembro de la escuela de Platón, y fue el primero en aumentar la cantidad de teoremas llamados "generales"; a las tres proporciones ya conocidas añadió otras tres, acrecentó el número de proposiciones sobre la "sección" —que debe su origen a Platón—, e hizo uso del "análisis"²⁷ para su tratamiento.

27. El método de "análisis" es aplicado a los teoremas 1 a 5 del libro XIII de los *Elementos* en una adición (IV 365 s. Heiberg, 198 s. Stamatis) que comienza definiendo tal procedimiento: "Análisis es la suposición de lo que se investiga, como si estuviera admitido, [y el pasaje] a través de sus consecuencias hacia algo admitido como verdadero" (pero, respecto de la "sección", véase nota 59). Papo (*Collectionis* vol. II 634, 11-13 Hultsch) dice algo similar a la adición citada: "Análisis es el pasaje desde lo que se investiga, como si estuviera admitido, a través de sus sucesivas consecuencias, hacia

l = 67, 8-20

Amiclas de Heraclea —uno de los discípulos de Platón— y Meneacmo —discípulo de Eudoxo que también estudió con Platón—, así como el hermano de éste, Dinóstrato, perfeccionaron aún más el conjunto de la geometría. Teudio de Magnesia parece haberse distinguido tanto en matemática cuanto en el resto de la filosofía. En efecto, también él sistematizó excelentemente los elementos y convirtió en más generales muchas proposiciones particulares.²⁸ También vivió en esa época Ateneo de Cízico, quien llegó a ser famoso en varias disciplinas matemáticas, pero sobre todo en geometría. Estos hombres pasaron su tiempo juntos en la Academia, haciendo sus investigaciones en común.

m = 67, 20-68, 6

Hermótimo de Colofón llevó adelante el tratamiento de problemas planteados por Eudoxo y por Teeteto, descubrió muchos de los elementos y compuso algún libro sobre los "lugares". Filipo de Mende, quien era discípulo de Platón y fue estimulado por éste hacia la matemática, realizó sus investigaciones de acuerdo con las directivas de Platón, y se propuso hacer cuanto juzgó que sería de provecho para la filosofía de Platón. Los que han recopilado informaciones²⁹ han llegado hasta Filipo en lo que hace al perfeccionamiento de esta ciencia.³⁰

algo que es admitido por medio de la síntesis". La interpretación clásica (Cherniss la llama "ortodoxa") de esta definición se halla expuesta en Heath, *A History of Greek Mathematics*, II, p. 400-401; cf. Cherniss, "Plato as Mathematician" (*The Review of Metaphysics* IV 3, 1951), p. 414-415. Una discusión del tema encontramos en F. M. Cornford, "Mathematics and Dialectic in the *Republic*" (art. de 1932 incluido en *Studies in Plato's Metaphysics*, ed. R. E. Allen, Londres 1965), p. 70 ss. y R. Robinson, "Analysis", en *Mind* 45, 1936, p. 464-475. Más recientemente, A. Szabó, "Analysis" und Synthesis (Pappus II S. 634 f. Hultsch)", en *Acta Classica Univ. Scient. Debreen* X-XI, 1974-1975, p. 155-164. Ciertamente, en toda esta discusión debería precisarse mejor en qué medida la concepción de Papo corresponde al análisis practicado por los geómetras griegos en la época clásica.

28. Escogemos la lectura *menikôn* en lugar del dudoso *honkôn* que prefiere Friedlein.

29. O "los que han publicado narraciones": *hoi tês historías anagrâpsantes*.

30. Aquí Wehrli hace concluir el fr. 133 de Eudemo. El Prof. Burkert (ver nota 40) nos ha hecho la sugerencia de traducir *teleiôsis* "más bien 'perfección final' que 'desarrollo'". Hemos preferido una fórmula transaccional: "perfeccionamiento". Por un lado, si se piensa, con el Prof. Burkert, que el aludido es Eudemo, resulta difícil admitir que Eudemo haya visto una "perfección final" en la obra de discípulos de Platón. Por otra, habría que traducir antes (en 67, 11-12) "Amiclas... Meneacmo... y Dinóstrato... hicieron toda la geometría aún más perfecta", *teleotéran*.

- $n = 68, 6-10$ No mucho más reciente que ellos es Euclides, quien ha recopilado los elementos, sistematizando muchas proposiciones de Eudoxo y perfeccionando muchas de Teeteto, así como conduciendo a demostraciones irrefutables teoremas cuya demostración por sus predecesores era aún endeble.
- $o = 68, 10-20$ Este varón vivió en tiempos de Ptolomeo I. En efecto, Arquímedes—que vivió tras Ptolomeo I—menciona a Euclides; y cuenta además que, cierta vez, Ptolomeo le preguntó si no había, respecto de la geometría, un camino más breve que el de la instrucción en los elementos, y que Euclides le respondió que no había un sendero especial para reyes hacia la geometría. Es más reciente, pues, que los discípulos de Platón, pero anterior a Arquímedes y a Eratóstenes. Estos eran contemporáneos entre sí, como en algún lado dice Eratóstenes.
- $p = 68, 20-24$ En cuanto a sus objetivos, Euclides era platónico, y adhirió a esa filosofía. De ahí que se propuso, como meta del conjunto de la organización de los elementos, la construcción de las llamadas "figuras platónicas".
- $q = 68, 24-69, 4$ Hay muchos otros escritos matemáticos de este varón, abundantes en conocimientos científicos y en una sorprendente precisión. Tales los casos de su *Óptica*, de su *Catóptrica*, de su *Organización de elementos musicales* y también de su libro *Sobre las divisiones*.
- $r = 69, 4-9$ Pero por sobre todo se lo admira por su *Organización de elementos geométricos*,³¹ en razón del ordenamiento que les confirió, y de la selección de teoremas y problemas compuestos con vista a los elementos. Pues no incluyó todos los que podía mencionar, sino sólo los que podían servir como elementos.

31. Éste parece haber sido para Proclo el título de la obra de Euclides: *Geometrikè Stoicheíosis* (en "o" hemos traducido *stoicheíosis* por "instrucción en los elementos", versión igualmente posible).

III

Analizaremos ahora cada párrafo del "sumario" de Proclo, en función del propósito enunciado del presente trabajo.

a) Tannery, quien sustenta la tesis de que el "sumario" procede íntegramente de Gémino (y que éste se ha basado en Eudemo) afirma que lo que se dice en este primer párrafo "no corresponde a una doctrina tan inveterada en Proclo como para que se pueda creer que lo haya escrito sin haber sido incitado, cuando menos, por algún autor que tenía ante su vista. La autoridad de Aristóteles no debe tampoco engañarnos, aunque el Estagirita dice algo (*Met.* XI 8, 13) que justifica suficientemente la cita de Proclo; no se trata de una doctrina del Liceo, y un pensamiento tal sería tan singular en la *Historia geométrica* de Eudemo como lo es en Proclo. La creencia indicada en este párrafo es, por el contrario, muy conocida como formando parte de los dogmas estoicos. Por lo tanto debemos sospechar allí la mano de Gémino, salvo que dejemos a Proclo la mención de Aristóteles".³²

La última posibilidad dejada abierta por Tannery parece ser la más prudente. Por de pronto, la doctrina de la periodicidad del universo no es tan ajena a Proclo como dice aquí Tannery. Su concepción del movimiento cíclico del alma "intramundana" (o "mundana", *enkósmios*: *Elem. Theol.*, props. 199-200, p. 174 Dodds) lo lleva a considerar al círculo como la figura perfecta, y así, "en cuanto lo cíclico existe en las cosas generadas, tanto en los cambios como en las figuras, proviene de lo alto, de lo celestial" (*In prim. Eucl.* 147, 10-12).³³ Sin una concepción de esa índole resultaría incomprensible la frase "puesto que debemos examinar los comienzos de las técnicas y de las ciencias en el presente período", con la que Wehrli hace comenzar el fr. 133 de Eudemo.

Ciertamente, no hallamos otro pasaje en que Proclo hable de la recurrencia cíclica de las opiniones humanas o de la de las técnicas y de las ciencias. Pero ese aspecto de lo cíclico se halla en Aristóteles, y por eso viene a cuento la cita de éste. En el pasaje aristotélico mencionado por Tannery (*Met.* XII, 8, 1074 b Bekker) leemos que, "según lo probable, todas las técnicas y las filosofías muchas veces han podido ser descubiertas y nuevamente se extinguieron, y tales opiniones se han conser-

32. *La géometrie grecque*, p. 71.

33. Cf. W. Beierwaltes, *Proklos. Grundzüge seiner Metaphysik*, Francfort 1965, p. 217

ss.

vado hasta el presente como remanentes. Pero no es el único texto aristotélico relacionado con el presente párrafo de Proclo, ni tampoco el más apropiado para ser tomado como fuente (excepto en lo relativo a las palabras "las técnicas y las filosofías muchas veces"). P. e. en *De Caelo* I 3, 270b 19 leemos: "Hay que creer que las mismas opiniones nos ocurren no una vez ni dos, sino infinitas veces" (donde el verbo para "ocurrir" es el mismo —y en la misma forma verbal— que en Proclo: *aphikneisthai*). Otros pasajes casi idénticos hallamos en *Meteor.* I 3, 339b 28 y en *Polít.* VIII 9, 1329b25.

Naturalmente, para quien quiera servirse del "sumario" para organizar una "historia de la geometría" —atribuible o no a Eudemo—, dicho párrafo constituye un cuerpo extraño, algo no sólo innecesario sino molesto, cuya relación con lo que sigue no se advierte. Pero ya veremos que no son éstas las únicas palabras que, en el "sumario", resultan fuera de contexto (seguramente no así para Proclo, como hemos visto a propósito de la definición euclideana de "círculo"). Y en todo caso, conociéndose tan poco de la obra de Gémíno—y de su relación con el estoicismo de Posidonio, sobre cuyas concepciones "cíclicas" no sabemos nada preciso—, tampoco vemos por qué habría de tener este párrafo mayor conexión con los siguientes en Gémíno que en Proclo. Por consiguiente, la única fuente que detectamos en este pasaje es Aristóteles, en cita que Proclo ha pensado que le venía bien.

b) La fuente obvia de este pasaje—directa o indirectamente, veremos—es Heródoto II 109. Pero lo más interesante es que el relato de Heródoto se halla en abierta contraposición con la tesis de Aristóteles (*Met.* I 1, 981 b 13 ss.) de que primero se satisfizo las necesidades; así "las ciencias matemáticas se constituyeron primeramente en Egipto, pues allí la casta sacerdotal tenía tiempo libre". Sin duda, el relato de Heródoto es más correcto históricamente que el de Aristóteles,³⁴ ya que la tesis de éste, como diría Cherniss, no es histórica sino filosófica: descansa en uno de sus postulados básicos, que opone la libertad del espíritu en general y de la ciencia en particular, a la necesidad. Un peripatético tan fiel a su maestro como Eudemo—y, según lo que sabemos, poco creativo—, ¿podría haber preferido el relato de Heródoto?

34. Cf. B. L. van der Waerden, *Erw. Wiss.*, p. 26-28.

c) Este párrafo comienza con reflexiones sobre el pasaje anterior —que lo enlazan con lo que aquí continúa—, de cuño platónico-aristotélico, sin duda. Pero vale la pena anotar que la frase *tò en genéseí pherómenon apò tou ateloús eis tò téleion próeisin* la hallamos, en forma prácticamente idéntica, en *Elem. Theol.* 46, 16-17 (prop. 45), y asimismo en *In Pl. Tim.* III 322, 1. Al retomar Proclo el relato sobre los orígenes de las matemáticas, advertimos que, si bien Heródoto puede servir de fuente directa, más probablemente lo sea como fuente indirecta y sólo en parte, ya que no hallamos en él la referencia al nacimiento de la aritmética entre los fenicios, y menos aún la comparación —que leemos en Proclo— entre dicho nacimiento y el de la geometría entre los egipcios, lo cual puede ser encontrado en Estrabón (XVI 2, 24).

d) Tal vez desde que Aristóteles consideró a Tales de Mileto como "iniciador" (*archegós*) de la filosofía de la naturaleza e hizo empezar con él la historia de la filosofía, Tales ha pasado como el pensador más antiguo en diversos campos. Así Teofrasto, en sus *Physikôn dóxai*, lo ha tenido por "el primero que se abocó a la filosofía natural" (Hipól. I 1, 1), y más tarde Diógenes Laercio (I 23) dice que, de los "siete sabios", Tales "fue el primero en ser llamado sabio, durante el arcontado de Damasio en Atenas" (aproximadamente 582/1 a. C.).

Ciertamente, ya en la primera mitad del siglo V a. C., cuando menos, Tales había adquirido fama suficiente como para que se contara que había pronosticado un eclipse (Heród. I 74), que había desviado el curso de un río para que cruzara el ejército de Creso (*id.* I 75), que actuó como asesor de los jonios en un proyecto de confederación política (*id.* I 170), etc. Platón y Aristóteles supieron de esa fama, aunque sólo Aristóteles lo situó al comienzo de la historia de ese tipo de filosofía (la de la naturaleza, que—según Aristóteles—buscaba un "principio material de todas las cosas"). Por eso, y en analogía con Teofrasto, es probable que Eudemo, en su *Geometrikè historía*, lo haya considerado como el geómetra más antiguo; en todo caso, aparentemente Tales es el pensador más antiguo citado por Eudemo, tanto al hablar de la geometría (frs. 134-135 Wehrli) como al referirse a la astronomía (frs. 143-144 W.).

Por ello, y aunque no pensamos que toda vez que Proclo menciona a Tales tiene como autoridad a Eudemo—ni tampoco que lo atribuido a éste sea fidedigno—, cabe la posibilidad de que la fuente de este párrafo haya sido—muy probablemente en forma indirecta—Eudemo.

e) La fuente declarada de este párrafo es el sofista Hippias de Elis,

aunque seguramente lo que éste ha escrito no llegó directamente a Proclo, sino a través de alguna referencia tardía. Proclo relaciona a Hipias, en otros dos pasajes, con los intentos de "cuadrar" el círculo: pero no dice si es Hipias de Elis, y lo asocia con alguien muy posterior, como Nicomedes, de modo que no sabemos si se trata de la misma persona. Y quien es mencionado en este párrafo, Mamercus, nos es completamente desconocido, por lo cual resulta imposible precisar a través de quién conoció Proclo lo que pudo haber dicho Hipias de Elis.

f) Walter Burkert ha llamado la atención sobre la coincidencia de este párrafo con uno de Jámblico,³⁵ del cual ha afirmado que ha sido copiado por Proclo.³⁶ Posteriormente C. J. de Vogel ha atacado esta tesis,³⁷ sustancialmente sobre la base de que "tanto Jámblico como Proclo leyeron la misma exposición en la bien conocida obra de Eudemo". Dado que otras voces, como la de Glenn Morrow³⁸ y la de Bartel L. van der Waerden,³⁹ se han pronunciado a favor de la tesis de que Jámblico y Proclo se basan en una misma fuente—aunque no piensan que se trata de la "bien conocida obra de Eudemo", sino de una fuente intermedia—, el profesor Burkert se ha mostrado receptivo a tal formulación.⁴⁰ Como esta cuestión afecta no sólo al presente párrafo sino a todo el "sumario", nos detendremos a puntualizar las diferentes posiciones al respecto.

C. J. de Vogel sostiene el punto de vista que podríamos llamar más tradicional: el "sumario" pertenece a Eudemo, aunque se reconozcan términos propios de Proclo. Paul Tannery ha formulado la tesis tal vez más complicada de todas: Proclo se ha basado en un autor del siglo I a. C., Gémino, Gémino a su vez se ha basado en Eudemo, pero Eudemo,

35. *De Communi Mathematica Scientia*, p. 70, 1-3 N. Festa - W. Klein.

36. *Weisheit und Wissenschaft*, Nuremberg 1962, p. 386-387. Hay traducción inglesa (corregida por el autor) de E. L. Minar Jr., *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Cambridge, Mass., 1972, cf. p. 408-409.

37. "An important German Work on Pythagoras and the Pythagorean Tradition", en *Studies in Greek Philosophy*, Assen 1970, p. 78 ss., especialmente 88-90.

38. G. R. Morrow, *Proclus. A Commentary of the First Book of Euclid's Elements*, Princeton 1970, "Nota Suplementaria al Prólogo I", p. 344-345.

39. B. L. van der Waerden, *Die gemeinsame Quelle der erkenntnistheoretischen Abhandlungen von Iamblichos und Proklos*, Heidelberg 1980, ensayo que el autor ha tenido la deferencia de hacerme llegar por medio del Prof. W. Burkert.

40. Carta personal de 9.3.1981, en respuesta a un pedido de opinión respecto de un primer borrador del presente trabajo, y gracias a la cual he revisado prácticamente todo el mismo. Cf. nota 14 a la p. 26 del trabajo de van der Waerden *Die gem. Qu.*

al menos en lo referente al pitagorismo, se ha basado en una obra que Tannery calcula que ha sido escrita en el siglo V a. C., y que ha tenido el título *Tradition touchant Pythagore*.⁴¹ Morrow no se pronuncia respecto de las fuentes del "sumario—salvo que se tome como pronunciamiento las notas al pie de las páginas de su traducción—ni del "Prólogo II" en general, pero señala las coincidencias abundantes entre el "Prólogo I" y la obra de Jámblico *De comm. math. sc.*, concluyendo que, si Proclo no cita aquí a Jámblico y sí en el *Comentario al Timeo de Platón*, lo más probable es que ambos tuvieran como fuente una doctrina común en las enseñanzas de la escuela neoplatónica. Van der Waerden, en 1950,⁴² adoptaba la tesis que hemos llamado tradicional, aunque en forma crítica, ya que pensaba que no todo el "sumario" podía proceder de Eudemo (p. e. lo relativo a Euclides, pero tampoco "lo que es dicho sobre Platón y su discípulo Filipo de Mende"). Pero posteriormente ha seguido la tesis de Tannery, en lo que a Eudemo-Gémino se refiere: "La fuente directa de Proclo fue presumiblemente Gémino —quien vivió alrededor del 70 a. C.—, y la fuente de Gémino fue, sin duda, la Historia de la Matemática de Eudemo".⁴³ "En particular, el denominado 'catálogo de los geómetras' de Proclo, donde son enumerados los geómetras desde Tales hasta Euclides, ha sido tomado presumiblemente de Gémino".⁴⁴ Finalmente, tras una cuidadosa comparación del "Prólogo I" de Proclo y *De comm. math. sc.*, considera que la fuente allí es Gémino, y que puede extenderse al "Prólogo II", al menos en parte: "El 'catálogo de los matemáticos', sin duda, surge principalmente de la no conservada 'Historia de la geometría' de Eudemo, pero hay allí añadidos de alguna otra fuente, p. e. el añadido sobre Euclides al final del catálogo. Ya Tannery ha sospechado que Proclo no ha sacado el catálogo directamente de Eudemo, sino de Gémino, quien también ha hecho añadidos. Esta sospecha se ve confirmada por la presente investigación: la afirmación sobre Pitágoras surge efectivamente de Gémino, pues se halla también en Jámblico".⁴⁵

41. *La géométrie grecque*, p. 18 ss., 65 ss., 81 ss. Lo que Tannery interpreta como la publicación de un libro de geometría con el título de *Tradición relativa a Pitágoras* es la frase de Jámblico en *De comm. math. sc.* 78, 5 = *V. Pit.* 89: *ekaleito dé he geometría pròs Pythagórou historia*, esto es, "la geometría fue llamada por Pitágoras 'investigación'" (cf. Kühner-Gerth, *Satzlehre*, I, p. 516, 2 d; y discusión en Burkert, *Weisheit*, p. 385-386, *Lore*, p. 408).

42. Fecha de la primera edición holandesa de *Erw. Wiss.*

43. *Die Pythagoreer*, Zurich-Munich 1979, p. 38.

44. *Idem*, p. 246.

45. *Die gem. Qu.*, 25 (subrayado nuestro). Cf. *Die Pythagoreer*, p. 363.

La variante entre las dos últimas posiciones de v. d. Waerden puede parecer insignificante —incluso inexistente, ya que en ambos casos toma como fuente directa a Gémino, apoyándose en Tannery—, pero tiene importancia. Porque en un caso la fuente sigue siendo Eudemo —aunque indirectamente—, mientras en el otro es Gémino. Así la discusión sobre si la fuente de Proclo en este párrafo ha sido Jámblico (como sostenía Burkert) o Eudemo (como replica De Vogel) “ha caducado, dice van der Waerden: “La afirmación sobre Pitágoras surge de Gémino, quien a su vez se ha nutrido de los ‘mathematikoi’ pitagóricos”.⁴⁶

Por nuestra parte, actualmente nos resulta más convincente la hipótesis de una fuente común a Jámblico y a Proclo que la de la copia de Jámblico por Proclo. Lo que vemos menos claro es la precisión de esa fuente común, y respecto de qué tópicos de Proclo.

Por un lado, en efecto, mientras resulta viable hacer una comparación entre dos obras conservadas —como las citadas de Jámblico y Proclo—, sólo conjeturalmente cabe comparar una obra conservada con otra perdida. De este modo, podemos hablar de una fuente común a Jámblico y Proclo en pasajes de obras de ambos que presentan notoria similitud, pero no nos atrevemos a decidir cuál es esa fuente común, y menos a extender la influencia de ésta a pasajes que no tienen tal similitud.

Por otro lado, y como consecuencia de lo anterior, pensamos que la fuente común de Jámblico y Proclo sólo puede admitirse en los pasajes del “Prólogo I” de Proclo que van der Waerden ha demostrado coinciden con Jámblico, y que esa fuente común puede ser Gémino (aunque esto sólo a título de hipótesis). Pero eso no significa que Gémino o quien sea esa fuente común también sea la fuente común de las nueve palabras del párrafo sobre Pitágoras, a las que añadiremos la conexión entre Hipócrates y Teodoro en el párrafo “h”. El hecho cuantitativo de que, a lo largo de su obra, Proclo haga “veinte citas de Gémino”,⁴⁷ o, mejor, “no menos de veinte veces”,⁴⁸ (nosotros hemos contado veintiuna),⁴⁹ no tiene fuerza como para acreditar a Gémino como fuente. Comparativamente, podrían valer más las diecisiete citas de Apolonio, ya que dos de

46. *Die gem. Qu.*, p. 26.

47. Tannery, *La géométrie grecque*, p. 20.

48. V. d. Waerden, *Die Pythagoreer*, p. 246, cf. 299 y *Die gem. Qu.*, p. 9 (cf. Morrow, obra citada en nota 38, p. 31, n. 66).

49. Una vez en el “Prólogo I”, 6 en la sección sobre “Definiciones”, 7 en la de “Axiomas y Postulados” y 7 en el examen de las proposiciones.

ellas son hechas en el "Prólogo II" (contra ninguna de Gémmino allí). Pero no creemos que la cantidad de citas sea un buen criterio, ya que el autor más citado por Proclo es Platón, y muy pocas veces las citas corresponden—en el comentario a Euclides— a doctrinas platónicas.

En el caso de pasajes del "sumario" como el relativo a Pitágoras, al menos de las nueve palabras comunes a Proclo y a Jámblico, resulta excesivamente aventurado indicar una fuente. Pero si atendemos a lo que sigue, que es distinto en ambos autores por el contexto en que se mueven, podría admitirse que es alguna enseñanza del neoplatonismo pitagorizante (o neopitagorismo platonizante, como se prefiera) que han recibido ambos. Probablemente es Proclo quien mejor sigue tal enseñanza —adaptándola *ad hoc*—, ya que los términos *aúlos kai noerôs* son de indudable raigambre neoplatónica, y asimismo la referencia a las "figuras cósmicas", si bien se trata de una expresión que no conocemos fuera de Proclo, tiene clara filiación platónico-pitagórica.⁵⁰

g) La fuente de este parágrafo, al menos en la medida que es hecha explícita en él, es el diálogo pseudoplatónico *Rivales*, que data aproximadamente del siglo II a. C. Ciertamente, como el profesor Burkert nos ha hecho notar,⁵¹ Proclo cita tres veces más a Enópides (en Diels-Kranz 41, 12-14) respecto de cuestiones geométricas concretas, y una de ellas mencionando a Eudemo como fuente (fr. 138 Wehrli). Esas citas demuestran que Proclo conocía la fama de matemático de Enópides. Pero, curiosamente, Proclo menciona —en el presente parágrafo— a Enópides como de paso, como si, al lado de Anaxágoras, fuera una figura secundaria en geometría. Y el caso es que, si bien el nombre de Enópides ha alcanzado, en la historia de la filosofía una notoriedad muy inferior a la de Anaxágoras, el papel de éste en la historia de la geometría nos es desconocido.⁵² Por eso nos parece que la referencia hecha en los *Rivales* respecto de Anaxágoras y Enópides (dos jóvenes discutían acerca de ellos, "dibujaban círculos y representaban ciertas inclinaciones", etc., en aparente conexión con "fenómenos celestes") ha servido a Proclo para insertar el nombre de Anaxágoras en el "sumario".

50. Cf. Burkert, *Weisheit*, p. 386.

51. En carta citada en nota 40.

52. En tal sentido, y aparte de este parágrafo de Proclo, sólo contamos con una curiosidad que se lee en Plutarco, *De Exilio* 607 f (DK 59 A 38): "Anaxágoras, en la prisión, mostró en dibujos la cuadratura del círculo". Pero se trata de una confusión, dado que los intentos más antiguos y rudimentarios que conocemos en tal sentido son los de Hipócrates de Quíos. Cf. nuestras notas 16 y 17 a "Anaxágoras de Clazómenas", p. 317-318, en *Los filósofos presocráticos*, II (Madrid 1979).

h) Las primeras dos de las tres afirmaciones de este párrafo parecen proceder de fuentes distintas. La referencia a "la cuadratura de la lúnula" por Hipócrates de Quíos puede provenir de Eudemo (fr. 140 Wehrli, *apud* Simplicio, donde resulta bastante difícil precisar qué corresponde a Eudemo, ya que Simplicio mismo aclara que, a lo dicho por éste, añadirá "unas pocas cosas, en bien de la claridad, extractadas de los *Elementos* de Euclides, debido al estilo resumido de Eudemo, quien ha hecho su exposición en relatos concisos, según la costumbre antigua") en forma presumiblemente indirecta. Ciertamente, también podría provenir de Aristóteles, que hace la atribución en *Refut. Sof.* XI, 171 b 15,⁵³ una obra que ciertamente Proclo ha podido poseer más que la de Eudemo.

La conexión entre Hipócrates y Teodoro, en cambio, parece surgir de otra fuente, dado que jamás Aristóteles ni Eudemo mencionan a Teodoro; Eudemo conecta a Hipócrates con Antifonte (Aristóteles con Antifonte y Brisón) a propósito de la cuadratura del círculo (fr. 139-140 W.). Como Platón, en cambio, menciona a Teodoro pero nunca a Hipócrates de Quíos, la conexión tiene una resonancia de neoplatonismo ecléctico. Ahora bien, en la ya citada obra de Jámblico *De comm. math. sc.*, p. 77, 24-78, 1 leemos: "Las enseñanzas matemáticas progresaron después de que publicaron sus obras los dos que más las impulsaron, Teodoro de Cirene e Hipócrates de Quíos". Esto nos induce a pensar, en forma análoga a la conclusión sobre la fuente del párrafo "f", que tal conexión entre los dos matemáticos—éstos sí, los dos, de indudable renombre como tales—se basa en alguna enseñanza neoplatónica que han recibido Jámblico y Proclo.⁵⁴

La tercera afirmación —cuya referencia a "elementos" será examinada cuando analicemos el párrafo "I"— puede proceder de alguna de las otras dos fuentes mencionadas (la peripatética y la neoplatónica) o de una tercera fuente. Nótese que se dice que Hipócrates fue "el primero de los que son recordados" (o "mencionados") como habiendo compilado elementos. Es decir, Proclo cuenta con algún libro en que se halla tal registro, aunque no dice qué libro es ni cuál es su autor.

53. Las palabras *è ho tetragonismòs ho dià meniskon* son consideradas por Diels (DK 42, 3) como una glosa. Pero en todo caso, de ser así, se trataría de una glosa anterior a Proclo, por lo cual no cambia la cosa.

54. En *Weisheit*, p. 435, n. 82 (Lore, p. 459, n. 59) W. Burkert consideraba que Jámblico pudo haber derivado dicho pasaje de "Proclo *In Eucl.* 66, 4 = Eudemo fr. 133".

i) Este párrafo y los siguientes parecen poco apropiados para ser considerados como escritos por un peripatético, dado el "cafécter tendencioso" que vimos señalaba van der Waerden. En él, en efecto, aparece Plato' como el más importante matemático, al cual luego se atribuyen descubrimientos como el de la "sección" (par. "k"), y aparentemente el del método de "análisis" (fuera del "sumario", en p. 211, 21).⁵⁵ Y la mayor parte de los nombres que se nos presentan en los párrafos siguientes — en su mayoría desconocidos para nosotros— lo son en carácter de "platónicos", Euclides incluido. Del Peripato no se dice una palabra, cuando, si la fuente fuera Eudemo, al menos habría que incluir a Aristóteles, ya que ha escrito sobre matemática tanto o más que Platón. Tampoco figuran nombres posteriores como el del ecléctico estoico Posidonio, cuya ausencia, si la fuente fuera Gémino, resultaría injustificable. Y el caso es que Proclo, a propósito de distintos tópicos geométricos, cita a Aristóteles y a Posidonio, de modo que todo este desarrollo que hace Proclo no parece tener pretensión histórica alguna—al menos, en el sentido en que lo entenderíamos nosotros—, sino que muestra toda la evolución de la geometría hacia Euclides como un tránsito de la "potencia" al "acto", y en el cual Platón y los platónicos han desempeñado un papel fundamental.

j) De los cinco nombres que son mencionados en este párrafo, sólo dos de ellos—Arquitas y Teeteto—son figuras conocidas en la historia de la geometría. Leodamas sólo aparece en p. 211 en la anécdota (también contada por Diógenes Laercio) de que Platón le enseñó el método de "análisis", y con él hizo "muchos descubrimientos". A Neoclides y León sólo los conocemos por lo que aquí se dice. De León vemos que se dice algo similar a lo afirmado sobre Hipócrates, en el sentido de que compiló o compuso "los elementos" (de ello hablaremos al comentar "l"), también que "descubrió 'delimitaciones' (*diorismoi*)". Por el contexto, se ve que es el procedimiento que Platón —en el *Menón* 86e4 - 87b2— menciona como propio de los geómetras, y denominado *ex hypothéseos*, y que consiste en buscar, "como paso previo a la solución de un problema, las condiciones para la posibilidad de una solución", dicho en palabras de Heath.⁵⁶ Por consiguiente, y salvo que el plural usado aquí por

55. Ciertamente, no se dice allí que Platón lo descubrió, sino —como ha sido puntualizado— sólo que se lo enseñó a Leodamas; pero, puesto que ha sido "el primero" en enseñarlo (D. L. III 24), la tradición lo ha presentado como su inventor o descubridor.

56. *A History of Greek Mathematics*, vol. I (en adelante, Heath I), p. 319.

Proclo se dirija a aplicaciones varias del mismo procedimiento, la afirmación es errónea. Pero anacrónica también, ya que, si el procedimiento mismo nos es testimoniado por Platón, el término no lo vemos empleado en geometría antes de Arquímedes (*De Sphaera et Cyindro* II 4). Lo que llama la atención es que, de los cinco nombres mencionados en el parágrafo, el de León haya sido privilegiado hasta el punto de que se le dedique más espacio que a los otros cuatro juntos. Sobre todo, si tenemos en cuenta que, entre esos cuatro, dos son de particular importancia en la historia de la geometría, Arquitas y Teeteto. Y además de las menciones platónicas de ambos geómetras, Proclo disponía en ambos casos—aunque fuera indirectamente— de textos de Eudemo, que no ha usado: los fragmentos 141 y 141 I Wehrli. El primero de ellos corresponde al comentario de Eutocio a la obra de Arquímedes citada más arriba (p. 84, 2 del vol. III, Heiberg), donde se describe la solución que habría propuesto Arquitas para el problema de la duplicación del cubo. El frag. 141 I se halla en el comentario de Pappo al libro de los *Elementos* de Euclides, conservado en árabe, y traducido de esa lengua al inglés por W. Thomson,⁵⁷ y habla de Teeteto en base al diálogo homónimo de Platón, primeramente, y luego, invocando a Eudemo como autoridad, describe tres tipos de líneas irracionales que distinguía Teeteto, "según los diferentes medios".

Estos hechos resultarían insólitos, sin duda, si debiéramos pensar que este parágrafo tiene, por un lado, pretensión histórica, y, por otro, que su fuente es Eudemo. Pero si, quitamos ambas ideas del medio, la cosa se torna más lógica.

k) El principal matemático preeuclideo, Eudoxo, se ha visto mejor tratado por Proclo que otros matemáticos de nota, si bien no en su probable dimensión. A veces se afirma que el autor de un esolío al libro V de Euclides (*Elem.* V 280, 8-9 Heiberg = V 1, 211 Stamatis), donde se dice que la teoría de las proporciones contenida en ese libro es obra de Eudoxo, es Proclo. Pero, a más del hecho de que se acostumbra atribuir a Proclo esolios a Euclides con tan escaso fundamento —en nuestra opinión— como cuando se le niega la autoría de este "sumario", el geómetra Eudoxo no es mencionado por Proclo fuera de este "sumario".

57. *The commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements* (trad. árabe de Abû-Othmân al-Camashâtî, edición árabe-inglesa de G. Junge - W. Thomson, Cambridge 1950), p. 63.

Y aquí no es mucho lo que se dice, ni siquiera respecto de las proporciones. Lo de que "a las tres proporciones conocidas" (esto es, a la "aritmética", "geométrica" y "armónica": cf. Arquitas fr. 2 DK) "añadió otras tres" es una afirmación que comparte con Jámblico (*In Nicom. Arithm. Intr.* 101, 1-6 Pistelli; Jámblico escribe *mesótetes*, Proclo *analogiai*). En ese pasaje Jámblico mezcla dos fuentes: una, naturalmente, es Nicómaco, a quien debe la terminología, y conceptos como el de "subcontraria" (aunque este término ya se halle en Arquitas). Pero la atribución a Eudoxo deriva de otra fuente, puesto que Nicómaco, en el mismo capítulo que está comentando Jámblico (II 28, 6, p. 142 Hoche), dice que las primeras tres proporciones se deben a Pitágoras y han subsistido "hasta Aristóteles y Platón", mientras las otras tres son posteriores. Por consiguiente, no sería irrazonable pensar que la fuente de esta afirmación común a Jámblico y Proclo fuera una vez más, como en el caso de frases de los párrafos "f" y "h", una fuente neoplatónica pitagorizante; al menos, una fuente común.

Las otras dos atribuciones que en este párrafo se hace a Eudoxo han originado interminables discusiones. Qué son los teoremas llamados "generales", en efecto, nadie lo sabe. Heath y van der Waerden piensan, pero dubitativamente, que puede referirse a teoremas del libro V de los *Elementos* que, de un modo u otro, caen bajo el concepto de "magnitud".⁵⁸ En cuanto a los teoremas sobre la "sección", que Eudoxo habría tratado mediante el procedimiento del "análisis", hay desde el siglo XIX una polémica aún no resuelta, sobre si la "sección" es la sección de sólidos mediante planos (o sea, un precedente de las secciones cónicas), o bien si se trata de la "sección" que Leonardo Da Vinci denominó "áurea" (o sea, la división de una recta según una proporción extrema y una media, de modo que la recta entera sea a la sección mayor lo que ésta a la sección menor: Euclides VI 30; cf. LSJ *tomé* I 3). Y los primeros cinco teoremas del libro XIII, que conciernen a rectas seccionadas de tal manera son demostrados —en una adición alternativa a las pruebas ofrecidas en el texto, *Elem.* IV 365 s. Heiberg, 198 Stamatis— mediante análisis seguido de síntesis. "Presumiblemente, el asunto nunca será resuelto en forma definitiva, a menos que se descubran nuevos documentos" dice Heath.⁵⁹

58. Heath I 323; v. d. Waerden, *Erw. Wiss.*, p. 302.

59. Heath I 325.

1) Este párrafo queda incluido en las consideraciones que hicimos a propósito del "i" —y que, en menor medida, también se extienden a los "j" y "k"—, en primer lugar, respecto del papel fundamental que han desempeñado Platón y los platónicos en la evolución de la geometría; y en segundo lugar, respecto de la concepción de tal desarrollo como un tránsito de la "potencia" al "acto". Se dedica mayor espacio a hablar de Teudio de Magnesia (tan desconocido para nosotros, por lo demás, como Amiclas —o Amintas— y Ateneo) que a dos matemáticos que ocupan un lugar real en la historia de la geometría: Meneacmo —a quien Proclo cita varias veces— y Dinóstrato. Tal vez por eso Teudio ha tenido mayor fortuna entre los historiadores modernos de la matemática griega; en particular, las palabras que hemos traducido "también él sistematizó excelentemente los elementos" han servido de base para que Heiberg llegara a la conclusión de que "Teudio escribió el libro de texto de geometría de la Academia", en el cual se ha basado Aristóteles cuando, en sus exposiciones, pone ejemplos matemáticos. Heiberg supone que "Hipócrates de Quíos editó el primer libro de texto"; que fue "ampliado y más cuidado por León", y que, "después de Teudio, Eudemo no cita ningún otro libro de texto", ya que Hermótimo pertenece—según Heiberg—a la misma generación de Aristóteles, y además no se dice que escribió libro de texto, sino sólo que "descubrió muchas (proposiciones) de los elementos".⁶⁰ Aun cuando Kurt von Fritz ha formulado objeciones de peso contra la tesis de que Aristóteles se sirvió del libro de *Elementos* de Teudio para sus exposiciones⁶¹ tanto von Fritz como la mayor parte de los historiadores de la geometría están acordes con una hipótesis, basada en el "sumario" de Proclo, que hallamos formulada sucintamente en el diccionario Liddell-Scott-Jones (*ad stoicheion* II 3): "(*tà stoicheia*), título de las obras geométricas de Hipócrates de Quíos, León, Teudio y Euclides, Proc. *in Euc.* pp. 66, 67, 68".

Pero el título que tiene la obra de Euclides, según Proclo, no es *tà stoicheia* sino *he Stoicheiosis*, como se ve en la mención de las obras de Euclides (párrafos "q" y "r"; cf. p. 70 —donde se compara *he Stoicheiosis* con "el libro catártico y gimnástico" que "tituló *Falacias*"). Pues no sólo

60. J. L. Heiberg, *Mathematisches zu Aristoteles*, Leipzig, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. Wiss. 18, 1904, p. 3-4. Cf. Heath I 321 y Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford 1949, p. 1.

61. Kurt von Fritz, artículo "Theudios", en *Realencyclopädie der classischen Altertumwissenschaft* (1936) 2. Reihe, XI Halbband, col. 246.

en el caso de Hermótimo, que Heiberg separa, no parece, que Proclo le atribuya un libro sobre los "elementos" (y menos con ese título), sino tampoco en los demás casos, incluida la referencia al propio Euclides en el párrafo "n". En el caso de Hipócrates (par. "h") hemos traducido "ha compuesto un libro de elementos", aunque la palabra "libro" no aparece en el texto griego, porque el verbo *syngrápho* sugiere que lo que se ha compuesto ha sido puesto por escrito (pero Platón usa el verbo —en *Eutidemo* 272 a— referido a la composición de discursos puramente orales); podríamos haber traducido "ha compilado elementos". En todo caso, al hablar de León, Proclo usa el verbo *syntithemi*, sin connotación alguna de "poner por escrito", sino sólo con el significado de "componer", "organizar", "compilar". Análogamente, en el caso de Teudio, el verbo *syntáссо* "organizar" o "sistematizar", y *synágo* en el de Euclides en "n". O sea, una cosa es "compilar", "organizar", "sistematizar" (o "descubrir", caso de Hermótimo) "elementos" —incluso "componer un libro de" o "componer por escrito" "elementos"—, y otra distinta publicar un libro que tenga el título que Proclo le conoce al de Euclides. No es que Proclo piense que la única obra de *Stoicheiosis* geométrica es la de Euclides: en p. 73, 15-25 se refiere a otras (que, por la descripción que hace de ellas, se advierte que son obras llegadas a Proclo, y posteriores a Euclides) que han recopilado más elementos o menos, con demostraciones más extensas o más breves; pero "la *Stoicheiosis* de Euclides sobresale sobre las demás" (74, 10-11). Por eso mismo, para Proclo Euclides es *ho stoicheiotés*, el compilador de elementos por antonomasia.

No es nuestra intención afirmar que ni Hipócrates ni nadie compuso obras geométricas que recibieran—entonces o después—el título *tà stoicheia* (el uso matemático más temprano del término *stoicheion* debe ser el que conocemos por Proclo, p. 72-73, en el platónico Meneacmo,⁶² en forma directa el que conocemos es el de Aristóteles), sino sólo la de que no podemos servirnos del testimonio de Proclo para eso. Por la frase de "h", "Hipócrates fue el primero de los que son mencionados que

62. Cf. W. Burkert, "STOICHEION. Eine Semasiologische Studie", *Philologus* 103, 1959, p. 191-192. Contra la opinión común de considerar que el uso más temprano de *stoicheion* ha sido el gramatical, Burkert propone la prioridad del uso matemático. No estamos en condiciones de discutir tal tesis, pero en lo referente al título *Stoicheia*, que Burkert (p. 189) sostiene que ha tenido la obra de Euclides —y que luego extiende a las obras de Hipócrates, León, Teudio y Hermótimo, aunque con el artículo *tà*, que en rigor no lo hallamos en la cita de Hipócrates por Proclo—, Burkert declara que dicho título "está asegurado, porque ya para Arquímedes el libro es, simplemente, *he Stoicheiosis*". Y esto indica que tal título, el mismo que le da Proclo, era anterior a éste.

compuso elementos", hemos sugerido que Proclo disponía de algún libro en que se hacía tales menciones. Y sin duda Proclo, no inventó los nombres de León, Teudio y Hermótimo ni las atribuciones a ellos y a Hipócrates de haber compilado elementos. Probablemente en algún comentario a Euclides, llegado hasta Proclo, se han registrado tales antecedentes de Euclides. Si Proclo escogió, aparte del conocido nombre de Hipócrates de Quíos, sólo autores presuntamente platónicos, y si en esa obra—que habría servido a Proclo de fuente—se ha cometido un anacronismo al afirmar que ya Hipócrates compiló "elementos", es algo que no podemos saber.

La única conclusión que se sigue claramente de todas estas atribuciones de compilaciones de elementos es la de que Proclo las aprovecha para marcar el tránsito de la "potencia" al "acto", "de lo imperfecto a lo perfecto", que para él se alcanza con Euclides.

m) Aquí volvemos a encontrar el verbo *syngrápho* que, a propósito de Hipócrates, hemos traducido "componer un libro", y en este caso también, pero no ya respecto de "elementos"—de los cuales sólo se dice que "descubrió muchos" de ellos—sino de "lugares". Este último término, tal como es caracterizado por Proclo en p. 394, 17-19 "posición de una línea o de una superficie, que produce una y la misma propiedad", mientras "tópicos" son aquellos teoremas en los cuales se encuentra la misma propiedad respecto de cierto lugar en su totalidad", es tardío, aunque Papo remita su uso a "los antiguos".⁶³ Precisamente esta última mención nos hace pensar que tal vez Papo, en su comentario a Euclides, ha especificado con Hermótimo la referencia a "los antiguos", y ésa podría haber sido la fuente de Proclo en esta afirmación.

Lo que sigue y concierne a Filippo de Mende (o de Medma, según qué manuscrito se prefiera) constituye tal vez el pasaje más conflictivo del "sumario". Generalmente se identifica a este Filippo de Mende con Filippo de Opunte;⁶⁴ aunque esto se basa en una presunta confusión de Proclo, siendo que podría tratarse de otro platónico desconocido para nosotros (como Leodamas, Neoclides, León, etc.). Pero lo que mayor perturbación ha provocado es la última sentencia del párrafo, que suele ser traducida así: "Los que han compilado historias llevan hasta este punto el desarrollo de esta ciencia". Como lo que sigue inmediata-

63. Papo, *Coll.* III 54 (Hultsch). Cf. Heath I 218-219.

64. Morrow, obra citada en nota 38, p. 56.

mente es la frase "no mucho más reciente (o "más joven, *neóteros*) que éstos es Euclides", Heath dice: "Puesto que Euclides fue posterior a Eudemo, es imposible que Eudemo haya escrito esto; mientras que la descripción 'aquellos que han compilado historias', con la implicación de que eran un poco anteriores a Euclides, se adecua excelentemente a Eudemo".⁶⁵ (Por eso, y teniendo en cuenta la unidad de estilo con lo que sigue—estilo que no considera de Proclo—, Heath piensa que el redactor del "sumario" ha sido alguien posterior a Euclides—no Gémino—, pero que se ha basado en Eudemo, y por eso se alude a éste en esa sentencia.) Más enfáticamente, van der Waerden exclama: "¿Quién otro que Eudemo puede ser aludido con lo de los 'historiadores' que han descrito 'el desarrollo de esta ciencia', poco después de Filipo de Mende y antes de Euclides?"⁶⁶ Hay que examinar, pues, este tópico.

No hace diferencia que *méchri toutou*) sea traducido "hasta este punto" o "hasta Filipo", ya que de una manera u otra se quiere decir lo mismo. Y tampoco es relevante aquí la diferencia entre traducir *hoi tās historías anagrápsantes* "los que han registrado informaciones", o "los que han compilado historias" (Heath) o "los historiadores" (van der Waerden), dado que es ciertamente una cuestión conceptual de importancia, que ya hemos abordado en la primera parte de este trabajo, pero que no concierne a la cuestión que aquí está principalmente en juego: Eudemo como fuente de lo anterior a dicha sentencia.

La frase "no mucho más reciente que ellos es Euclides" se remite, con el "ellos" (o "éstos", *toúton*) no a "los historiadores" (o "los que han recopilado informaciones") sino a Hermótimo y Filipo. La expresión "no mucho más reciente" (o "más joven") es similar a la ya empleada antes tres veces. En efecto, en el párrafo "g" leemos, respecto de Enópides de Quíos, "un poco más joven" (o "más reciente", *neóteros*) que Anaxágoras (p. 66, 2); en el "j", respecto de Neoclides, "más joven" que Leodamas (p. 66, 18); en el "k", respecto de Eudoxo, "un poco más joven" que León (p. 67, 2). En otras palabras, "no mucho más joven" (o "reciente") es una fórmula cronológica, como "más joven" o "un poco más joven", más precisa que otras como "después de él" (*metà toúton*) o "tras éstos" (*épi toútois*), que han sido a veces interpretadas como "una generación des-

65. Heath I 118.

66. *Erw. Wiss.*, p. 149.

67. P. e. Kurt von Fritz, "The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontus" (art. de 1945 incluido en *Studies in Presocratic Philosophy* I, ed. D. J. Furley - R. E. Allen, Londres 1970), p. 384.

pués".⁶⁷ Por consiguiente, como todas las fórmulas cronológicas del "sumario", la frase "no mucho más reciente que ellos es Euclides" se refiere a geómetras (a los dos últimos mencionados). O sea, la última sentencia de "m". ("Los que han recopilado... de esta ciencia") es una digresión, y debe ser considerada como tal.

Pero si la frase "no mucho más reciente que éstos es Euclides" se refiere a los últimos geómetras mencionados, Hermótimo y Filipo, "los que han recopilado informaciones" no son "un poco anteriores a Euclides (Heath) ni deben ser situados "poco después de Filipo de Mende y antes de Euclides (van der Waerden). Más probable es que, con esa expresión, Proclo haya tenido en mente escritores que, al comentar los *Elementos* de Euclides, han rastreado los precedentes de tal obra. En tal sentido era completamente lógico que—aun cuando fueran varios siglos posteriores a Euclides—llegaran con su rastreo hasta los matemáticos inmediatamente anteriores a Euclides, fueran éstos Hermótimo y Filipo, o bien peripatéticos—o de alguna otra escuela—que Proclo ha preferido omitir.

n) La primera frase de este párrafo ya ha sido comentada. Pero nótese que, por única vez en el "catálogo de geómetras", se mencionan juntos los nombres de los tres matemáticos que más probablemente han contribuido a la construcción de los *Elementos*: Teeteto, Eudoxo y el propio Euclides. Esto trae dudas sobre si la mención de Teeteto y Eudoxo en "j" y "k", respectivamente, responden a la misma fuente que el presente párrafo.

o) Como se ha notado, Proclo no poseía mayor información cronológica de la vida de Euclides que la que tenemos nosotros: éste había sido posterior a los discípulos de Platón pero anterior a Arquímedes. La anécdota que en este párrafo se pone en boca de Arquímedes es contada por Estobeo, con cambio de personajes (aunque sin mención de la "instrucción en los elementos"); Meneacmo en lugar de Euclides, Alejandro en lugar de Ptolomeo. Por eso, Heath piensa que aquí ha podido existir "una tentación de transferir tal historia, en una fecha posterior, al matemático más famoso".⁶⁸ Es posible, aunque no sabemos si la fuente de Estobeo es anterior o no a la de Proclo.

68. Heath I 251-252.

p) Este párrafo confirma una vez más lo ya apuntado: se desea destacar el papel de Platón en el "perfeccionamiento" de la geometría, hasta el punto de que no sólo se hace de Euclides un "platónico", sino que se presume que la meta de toda su construcción geométrica está en los cinco poliedros regulares del libro XIII, que aquí Proclo denomina, acorde con la intención del párrafo, "figuras platónicas".

Pero llama nuestra atención el hecho de que ésta sea la única vez que Proclo usa esta denominación, "figuras platónicas"—la común en él es la que en este "sumario" refiere a Pitágoras, "figuras cósmicas"—, que ni siquiera hallamos en su comentario al *Timeo* (donde, por lo demás, no llega a la construcción de los sólidos que allí hace Platón).⁶⁹ Podría tratarse aquí de una expresión *ad hoc*, esto es, para enfatizar el carácter platónico de la geometría euclidea. Sin embargo, el hecho de que diga "las llamadas 'figuras platónicas'" parece indicar que no se trata de una expresión propia, sino de una más o menos difundida.

Y hay por lo menos otro texto en que se usa la expresión mencionada, a saber, un escolio al libro XIII de Euclides (V 654 Heiberg, V 2, 291 Stamatis) que a veces ha sido atribuido a Papo.⁷⁰ El texto dice así: "En este libro, o sea en el XIII, se construyen las llamadas 'figuras de Platón', las cuales no son de él, sino que tres de las mencionadas figuras—el cubo, la pirámide y el dodecaedro—son de los Pitagóricos, mientras que de Teeteto el octaedro y el icosaedro. La denominación 'de Platón' la reciben porque éste las menciona en el *Timeo*. Pero este libro lleva también el nombre de Euclides, en razón de haberles impuesto éste un orden propio de elementos". Este texto, como se ve, es mucho más concreto y elocuente que el de Proclo. Respecto de la denominación "figuras platónicas" o "figuras de Platón", también usa el participio "llamadas" (*legómena*, en Proclo *kaloúmena*), con lo que a su vez remite a un uso ya difundido. Dada la referencia al *Timeo*, es posible pensar en uno de los tantos comentaristas de esa obra platónica, o bien en algún escritor—de preferencia, un geómetra—que conociera el *Timeo*. Si el autor del escolio fuera Papo, el escritor que difundiera o forjara tal expresión debería ser anterior al último tercio del siglo III d. C. Posidonio de Apamea reúne las condiciones citadas: vivió en el siglo I a. C., escribió

69. Dicho comentario contiene, de todos modos, referencias a las "cinco figuras", de las cuales destacamos una que guarda similitud con la de "figuras cósmicas": *pénte tà en tòi panti schémata* (II 207, 33 Diehl).

70. Cf. Eva Sachs, *Die fünf Platonischen Körper*, Berlín 1917, p. 29 y 80.

un comentario al *Timeo* y por lo menos un tratado de geometría que Proclo cita no menos de siete veces—no necesariamente a través de Gémino—, en una de ellas definiendo el concepto de "figura" (figura plana, pero figura al fin).

Ciertamente, si aceptáramos la posibilidad de que Posidonio haya forjado o difundido la expresión "figuras platónicas", esto no significa que haya sido fuente de todo este párrafo, sino sólo de la expresión. Ello habría sido aprovechado por Proclo en su "homenaje" al platonismo.

q) La única manera de saber si el contenido de este párrafo procede sólo de Proclo o bien de otra fuente sería saber con certeza si las obras de Euclides que Proclo cita aquí han sido conocidas por éste. Dada la vaguedad del título que confiere a la obra musical, *hai katà mousikèn stoicheiόseis* (literalmente "las organizaciones de elementos concernientes a la música"; el plural ya había sido usado en un título por Epicuro—según D. L. X 44—, así como también el singular, *apud* D. L. X 37), la referencia se oscurece. Más aún al saber que la *Catóptrica* que ha editado Heiberg es posterior a Euclides, por lo que han surgido dudas sobre una posible confusión en Proclo.⁷¹ Si a eso añadimos que Proclo no cita la importante obra musical de Euclides que aún tenemos, la *Sectio Canonis*, estaremos a un paso de pensar que, una vez más, la fuente es Papo, quien cita al menos la *Óptica*. No necesariamente fuente única, por lo demás.

r) Al menos en este párrafo podemos tener la seguridad de que Proclo habla exclusivamente por cuenta propia—o al menos ha podido hacerlo—, ya que cita la obra que luego pasa a comentar (aunque el comentario sólo abarque el libro I de Euclides, pero en él hay referencias prácticamente a todos los demás libros de los *Elementos*).

IV

Vamos a resumir ahora las conclusiones que extraemos del examen que hemos realizado del "sumario". Hemos visto, en efecto, que existen, inclusive dentro de un mismo párrafo, más de una fuente. Por ello decimos:

71. Cf. Heath I 441-444.

1) Hay afirmaciones que *pueden* provenir de Eudemo, como es el caso de las referentes a Tales, en "d"; acaso la mención de Enópides en "g" y la referencia a la "cuadratura de lúnulas— (si no pertenece a Aristóteles) en "h".

2) Hay afirmaciones que *no pueden* provenir de Eudemo, como las referidas al nacimiento de la geometría y la aritmética—en "b" y "c"—"a partir de la necesidad", o como las que conciernen a Euclides desde el párrafo "n" hasta el "r". Pero también las que presentan a Platón como geómetra, en "i" y "k", y la que se refiere a Filipo de Mende, en cuanto con la sentencia final de "m" se alude a quienes hacen terminar la evolución de la geometría con este Filipo, quien "realizó sus investigaciones de acuerdo con las directivas de Platón", etc.

3) Hay afirmaciones que *no tienen por qué* provenir de Eudemo, ya que se basan—explícita o implícitamente—en autores fácilmente detectables: tal el caso de la cita de Aristóteles en "a", de Hippias de Elis en "e" y del diálogo *Rivales* en "g"; así como la paráfrasis de Heródoto y/o Estrabón en "b" y "c" (por no mencionar los casos de Arquímedes en "o" y tal vez Posidonio en "p", que corresponden a un período posterior a Eudemo).

4) Hay afirmaciones que aparentemente provienen de una enseñanza neoplatónica escolar. Esta fuente, que hemos calificado de "neoplatónica pitagorizante", hemos visto que es común a Proclo y a Jámblico por lo menos en tres casos: en una frase de "f", en otra de "h" y en otra de "k".

5) Hay afirmaciones que aparentemente proceden de un libro que ha registrado los antecedentes de Euclides en el manejo de "elementos": tales los casos de las referentes a la publicación de libros, a la compilación o descubrimiento de "elementos", en los párrafos "h", "j", "l" y "m".

6) Hay afirmaciones que aparentemente proceden de un libro que ha rastreado antecedentes de la geometría de Euclides. Este libro—tal vez un comentario a los *Elementos*, como el de Papo—puede ser el mismo que el aludido en el caso anterior (o sea, un libro que ha registrado los manejos de "elementos" anteriores a Euclides). Pero no es el mismo en todas las referencias: no parece ser el mismo, al menos, en "j", donde se mete en una misma bolsa a Arquitas y Teeteto con el ignoto Leodamas, que en "n", donde Teeteto y Eudoxo se lucen junto a Euclides. Y tantos nombres de platónicos desconocidos sugieren, ciertamente, algún comentario a Euclides—o alguna ilustración sobre el pensamiento matemático anterior a Euclides—forjado dentro del platonismo para instrucción de los neófitos.

Como se ve, no es mucho lo que podemos remontar a Eudemo de lo dicho en el "catálogo de geómetras". Ciertamente, en lo relativo a las afirmaciones que hemos clasificado en los grupos 3) a 6) se trata de pasajes que globalmente se suelen atribuir a Eudemo; pero confiamos en haber demostrado suficientemente que proceden de otras fuentes, aunque, a excepción de las incluidas en el grupo 3), no las podamos precisar.

Por lo demás, en nuestros comentarios a cada párrafo, nos hemos hecho eco de la opinión más generalizada, en el sentido de que la obra de Eudemo ha llegado a Proclo sólo indirectamente; pero también en lo relativo a Hipias y a Posidonio; y por supuesto, en lo que toca a Arquitas, Teeteto, Eudoxo, Meneacmo, etc. En todo esto pensamos, sin embargo, que hay una subestimación de la biblioteca de que ha podido disponer Proclo. No están claras, en efecto, las razones por las que Tannery piensa que el libro de Eudemo puede haber llegado a Gémino, mas no a Proclo: de hecho, Tannery da sólo argumentos en favor de que el "sumario" no es original de Proclo y que se debe a Gémino, argumentos que no presentan mayor solidez.⁷² Se supone que, así como las *physikón dóxai* de Teofrasto se han perdido muy temprano y la reconstrucción efectuada por Diels de la misma, en base a textos tardíos, se remonta no más allá de un epítome compuesto en la escuela de Posidonio, algo análogo tiene que haber acontecido con la *Geometrikè historia* de Eudemo. Pero la analogía no es un razonamiento preferido por la ciencia. Mientras no se haga con dicha obra de Eudemo una labor de reconstrucción como la efectuada por Diels con la de Teofrasto, cabe el beneficio de la duda sobre si el libro de Eudemo llegó a Proclo o no. De todos modos, haya tenido a mano Proclo dicho libro o sólo una fuente intermedia, nuestro resultado muestra que no lo ha usado mayormente para la confección del "sumario".

72. Heath (I 119-120) está de acuerdo con Tannery en que la autoría del "sumario" no corresponde a Proclo; pero en cuanto a que se debe a Gémino, le parece "altamente improbable, porque los extractos que poseemos de la obra de Gémino sugieren que los asuntos discutidos en ella eran de una clase diferente; parecen haber sido cuestiones generales relativas a la filosofía y contenido de las matemáticas, e incluso Tannery admite que los detalles históricos podrían haber entrado en la obra incidentalmente". Por eso mismo —y por los exámenes comparativos efectuados por Tannery, Morrow y van der Waerden— estamos dispuestos a admitir que Gémino puede ser fuente de al menos parte del "Prólogo I" de Proclo.

Pero además pensamos que no es sólo la biblioteca de Proclo la que probablemente ha sido subestimada, sino que también *Proclo aparece subestimado, por lo común, en cuanto a sus posibilidades de elaborar el "catálogo de géometras"*.

Una cosa es que Proclo no haya tenido a mano obras de Tales, Pitágoras y pitagóricos, Enópides, Hipócrates, Teodoro, etc. (si es que han existido—que no es el caso de Tales ni de Pitágoras—, como las que se supone que han escrito los géometras de la Academia que menciona Proclo) y haya recurrido a distintas fuentes, que hemos tratado de detectar en cada caso. Pero otra cosa muy distinta es presumir que Proclo ha copiado de Eudemo o de Gémino—o de quien sea—todo el "sumario", incluso en la forma podada, por detrás y por delante, que lo hace Wehrli. Esta segunda posibilidad nos parece inaceptable, ni aun cuando los que la sostienen reconozcan que hay diversos términos y fórmulas, en el "sumario", que han de proceder de Proclo.

De ningún modo afirmamos que el de Proclo sea el primer relato, cronológicamente ordenado, de la evolución de la geometría previa a Euclides a través de personajes considerados importantes en la misma; ni tampoco que Proclo no se haya servido de alguno de esos relatos. Por el contrario, teniendo en cuenta, en general, que *el período helenístico ha sido fecundo en ordenamientos cronológicos de escritores y pensadores (más, por cierto, que el período clásico, a cuyo crepúsculo pertenece Eudemo, cuya obra hemos visto procede más por clasificación temática que por ordenamiento cronológico, al igual que Teofrasto)*, y que sabemos de la existencia de más de un comentario de Euclides, anteriormente a Proclo, hemos concluido que por lo menos uno de esos libros—presumiblemente dos como mínimo, hemos visto—debe de haber servido de fuente a Proclo. Pero el único que nos ha llegado —a excepción de la versión árabe del comentario de Papo al libro X de Euclides—es el de Proclo, y no encontramos ningún fundamento razonable para decidir que lo ha copiado de otro.

Ahora bien, no sólo en el comentario propiamente dicho al libro I de Euclides, sino también en sus comentarios a diálogos de Platón, Proclo revela conocimientos del pensamiento griego anterior, si no correctos, al menos considerables en extensión. Por otra parte, en su *Teología Platónica* y, sobre todo, en sus *Elementos de Teología*, se muestra como un pensador original, si no de nivel sobresaliente, por lo menos de una índole que le permite hacer algo más que repetir a Plotino. ¿Por qué entonces negarle la posibilidad de confeccionar un listado de géometras anteriores a Euclides, citados por orden cronoló-

gico, con un enfoque propio de la escuela a la que él mismo pertenecía y comentarios de su cuño?

Dadas estas últimas consideraciones, puede alegarse que el "catálogo de geómetras", carece prácticamente de valor. Pero no ha sido el propósito del presente ensayo juzgar el valor del "sumario", sino intentar demostrar que el sumario no proviene—directa o indirectamente— de Eudemo, y, también, desacreditarlo como fuente más o menos segura para uso de los modernos historiadores de la geometría griega.

III. LA INFLUENCIA DE PLATÓN Y ARISTÓTELES EN LA AXIOMÁTICA EUCLIDEANA*

1. E. KAPP Y K. V. FRITZ: LA PRIORIDAD DE LAS PREMISAS

Es sumamente probable que el estudio de Kurt von Fritz sobre los principios en la matemática griega sea el más importante que sobre el tema se haya escrito en los últimos cincuenta años.¹ Así como el didáctico libro de Ernst Kapp sobre la lógica aristotélica² se alinea, en punto a lógica, con el de Werner Jaeger,³ a su vez el de K. v. Fritz se entronca con el de Kapp en cuanto al señalamiento de la posterioridad cronológica que Aristóteles confiere a las premisas respecto de lo que aparece como extraído de ellas.

Kapp, en efecto, hace notar que "la definición del silogismo puede comprenderse de dos maneras totalmente diferentes": en una de ellas se comienza "con una combinación dada de premisas" y se buscan "las inferencias posibles" a partir de aquéllas, mientras por la otra se parte de "una conclusión dada" y se buscan "las premisas posibles". "Debido a que lo primero parece ser lo más natural, casi siempre se pasa por alto el hecho de que Aristóteles consideraba lo segundo al emprender su

* Publicado por primera vez en *Nova Tellus* 2 (1984), México, p. 27-66. En la presente versión se suprimen los números en que allí estaban divididos los párrafos, y se los sustituye por los principales subtítulos respectivos.

1. APXA I 13-103 = GGAW 335-429. Otros dos trabajos de singular relevancia para el tema son la "Introducción" de Heath a su traducción comentada, *The 13 Books of the Elements* (vol. I), y los comentarios a la sección axiomática de cada libro de Euclides y el de A. Szabó, *Anfänge des Euklidischen Axiomensystems*, 1960, incluido en ZGGM p. 355-461.

2. *La Lógica en la Grecia antigua*, Puebla, Cajica, 1945 (La 1ª. ed. inglesa data de 1942); no hay mención de traductor.

3. *Aristoteles. Grundlegung einer Geschichte seiner Entwicklung*, Berlin, 2ª. ed. W. de Gruyter, 1955; hay trad. española de la 1ª ed. de 1923.

tarea.<...> Según Aristóteles, el auténtico silogismo científico puede tener como conclusión un hecho previamente conocido, y la necesaria explicación científica de este hecho formará las premisas."⁴

Análogamente, dice Kurt von Fritz, "las proposiciones matemáticas no son halladas de modo tal que algunas de ellas sean puestas en funcionamiento por la maquinaria lógica como premisas verdaderamente conocidas y con eso salga a la luz algo nuevo. Antes bien, se comienza con la conjetura de que algo se comporta de tal o cual manera, y luego se hace el intento de demostrarlo de modo rigurosamente lógico, sobre la base de proposiciones conocidas ... También aquí, pues, lo primero es, en cierto modo, el resultado, aunque primeramente sólo como conjetura; y las premisas a partir de las cuales puede ser demostrado son también aquí halladas sólo posteriormente. De ahí también el fenómeno histórico general de que la fundamentación axiomática exacta de una nueva teoría matemática siempre tiene lugar sólo después de que la teoría está bastante elaborada".⁵

Ante esto el matemático Árpád Szabó expresa su protesta: "no se entiende cómo la técnica demostrativa de la matemática griega, en sentido estricto, pudo alcanzar un grado tan alto de desarrollo en la era prearistotélica, si la fundamentación de la matemática en principios se produjo sólo más tarde. ¿Es posible, pues, desarrollar una técnica demostrativa casi perfecta, sin que se tenga más o menos en claro lo referente a los fundamentos? ¡Creo que no!"⁶ "De hecho, la matemática sistemático-deductiva comenzó por lo menos dos siglos antes de Euclides y ya a mediados del siglo V Hipócrates de Quíos compuso *Elementos*. Naturalmente, este trabajo científico es simplemente inconcebible sin algunos fundamentos matemáticos y, por supuesto, ya Hipócrates *debe haber puesto* fundamentos al frente de sus 'Elementos', aun cuando *por el momento no sepamos* cuáles pueden haber sido sus fundamentos."⁷

Por el momento, dejamos abierta la propuesta de Szabó.

4. Kapp, ob. cit. en nota 2, p. 140-141.

5. APXA I 21 = GGAW 343.

6. AGM 305 (suprimimos los subrayados del original alemán) y BGM 228.

7. AGM 309-310 y BGM 232 (los subrayados son nuestros).

2. CARACTERÍSTICAS DE LOS PRINCIPIOS

Kurt von Fritz no niega que hayan existido formulaciones axiomáticas antes de Aristóteles; pero en cuanto a si había distintos tipos de principios y cómo se diferenciaban entre sí, declara que "antes de Aristóteles no se había alcanzado ninguna claridad". Y precisa el aporte de éste en tres puntos: uno, "que toda ciencia debe partir de primeros principios indemostrables, pero no por eso menos verdaderos y seguros"; otro, el intento de "determinar en general las propiedades que deben tener tales principios", y, por último, el de "dividir estos principios en grupos".⁸

En el cap. 2 del libro I de los *Segundos Analíticos*, Aristóteles señala que "la ciencia demostrativa debe [partir de premisas] que sean verdaderas (*aletheis*), primeras (*prôtai*), inmediatas (*amésotai*), más familiares (*gnorimóterai*) [que la conclusión], anteriores (*prôterai*) [a ésta], causas (*aitiai*) de la conclusión" (71b₂₀₋₂₂). Ciertamente, el término griego *gnórimos* se ve mejor traducido al alemán, *einsichtig*, que al español, "conocido" o "familiar" pero también "inteligible" o "comprensible".

"La exigencia de que los primeros principios deban ser 'más conocidos' (*einsichtiger*) que las proposiciones deducidas de ellos", dice K.v.Fritz, "significa, evidentemente, que la elección de lo que es asumido como primer principio y de lo que de allí es deducido no es arbitraria (*nicht frei steht*), sino que es determinada por la relación entrambos, y de manera tal, que lo admitido como principio debe ser en sí más conocido, más simple y más abstracto que lo que de allí es deducido".⁹

Esta interpretación de Aristóteles ha sido recordada por Szabó al responder a una pregunta—en debate posterior a una conferencia—del lógico Paul Bernays, quien manifestó: "Actualmente sabemos que no hay una distinción esencial entre las cosas que demostramos y las cosas que asumimos sin pruebas, porque podemos escoger diferentes conjuntos de axiomas. ¿Sabían los griegos esto? No deberíamos suponer simplemente que no. Ellos eran probablemente más inteligentes de lo que

8. APXA I 92-93 = CGAW 417-419.

9. APXA I 23 = CGAW 345-346.

podemos concebir". La respuesta de Szabó incluye la interpretación de Aristóteles por K. v. Fritz, así como la propia opinión de que los matemáticos del tiempo de Aristóteles—o anteriores—no compartían forzosamente el pensamiento de éste sobre ello; de modo que bien podían considerar que "la matemática elige arbitrariamente (*arbitrarily*) sus principios no demostrados".¹⁰

Kurt von Fritz replica: "si los griegos antiguos hubiesen querido comenzar por elegir sus axiomas 'arbitrariamente' <...> jamás habrían logrado construir un ordenado edificio de pruebas matemáticas. Que hoy se pueda experimentar con la elección de distintos sistemas de axiomas, proviene de que el ámbito de conocimientos matemático-estructurales ha llegado a ser tan grande, y hasta cierto punto tan transparente, que se pueden escoger sistemas de axiomas adecuados para su análisis. Pero tampoco entonces esta elección resulta 'arbitraria', en sentido estricto, sino referida al contexto estructural correspondiente". Pues los griegos, al tomar contacto con la matemática babilónica, se enfrentaron a una multiplicidad de métodos y fórmulas muy complejas, pero que conducían sólo a resultados aproximados; por lo cual se propusieron probarlo todo lo más exactamente posible, y no cesaron en ese esfuerzo demostrativo antes de haber accedido a la transparencia de algunas cosas que pudieron poner como principios de la demostración matemática, asegurando la solidez de ésta.¹¹

En el capítulo mencionado, Aristóteles distingue la *thésis* del *axioma* en que, si bien ambos son primeros principios indemostrables, el primero no es imprescindible para adquirir un conocimiento científico, a diferencia del axioma. Y diferencia dos tipos de *thésis*: la *hypóthesis*, que dice que algo es (o sea, afirma la existencia de algo) y la "definición" u *horismós*, que dice lo que algo es, su significado (*Anal. Post. I* 2, 72a, 14-24).

En el cap. 10 del mismo libro (cf. *infra* p 106-107) se nos presenta otra división de los principios: en *koiná* o "comunes" a todas las ciencias cuantitativas e *ídia* o "particulares" de cada ciencia. Así *ídia* son "por ejemplo, una línea que es de tal manera, o la recta", es decir, sólo

10. A. Szabó, "Dialectics and Euclid's Axiomatics", en *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967, p. 1-27. Tomo la cita de las palabras de Bernays, así como la paráfrasis de la respuesta de Szabó y la referencia bibliográfica, de K. v. Fritz, PTAM 68 ss.

11. K. v. Fritz, PTAM 69-71 y APXA I 78-79 = GGAW 403.

principios geométricos. Como ejemplo de *koiná* se da la Noción Común 3 de Euclides. No vemos el término *thésis* ni la división terminológica del cap. 2, aunque sí la distinción conceptual: de los *idia* se supone el significado y, si se trata de cosas muy simples (la unidad, el punto y la línea) también la existencia. De los "atributos esenciales" como "par" e "impar" se supone el significado, pero su existencia debe ser demostrada.

3. LA AXIOMÁTICA DE EUCLIDES Y SUS DIFICULTADES

Conviene echar una mirada a la axiomática euclideana, para ver qué es lo que hallamos en los *Elementa* (obra compuesta en el 300 a.C., o sea, algo más de 20 años después de que murió Aristóteles) que pueda ser relacionado con lo dicho en los *Analytica Posteriora*.

Al comienzo del libro I encontramos, sin ninguna explicación, un conjunto de proposiciones divididas en tres grupos.

El primer grupo contiene, bajo el título *Hóroi*,¹² 23 definiciones.

Inmediatamente después vienen 5 *Aitémata* o "Postulados":

"1. Postúlese que desde cualquier punto se trace hacia cualquier punto una línea recta.

"2. Y que una recta limitada [o sea, un segmento de recta] se prolongue continuamente en forma recta.

"3. Y que, con cualquier centro, y a cualquier distancia [esto es, con cualquier radio], se trace un círculo.

"4. Y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí.

"5. Y que, si a dos rectas las corta una [tercera] recta, la cual forma sobre la misma parte ángulos internos [que, sumados, son] menores que dos rectos, al prolongarse ambas rectas hacia el infinito, se corten sobre el lado en que los [ángulos internos, sumados, son] menores que dos rectos".¹³

Finalmente vienen 9 *Koinai énnōiai* o 'Nociones Comunes':

"1. Dos cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

"2. Y, si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los todos son iguales.

12. *Elementa* I, ed. Heiberg-Stamatis, Leipzig, Teubner, 1969, p. 1-4.

13. Idem p. 4-5.

"3. Y, si a cosas iguales se sustraen cosas iguales, los residuos son iguales.

"4. Y, si a cosas desiguales se añaden cosas iguales, los todos son desiguales.

"5. Y las cosas que son el doble de una misma cosa son iguales entre sí.

"6. Y las cosas que son la mitad de la misma cosa son iguales entre sí.

"7. Y las cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.

"8. Y el todo es mayor que la parte.

"9. Y dos rectas no comprenden un área".¹⁴

Sólo las N.C. 1-3 no han visto nunca controvertida su autenticidad; Heiberg considera a las 4-6 como interpolaciones, y Heath extiende tal carácter a la 9. Al comienzo de los demás libros no hay Postulados ni Nociones Comunes. Definiciones sí, en total de 131 (incluyendo las del libro I): las aritméticas son dadas al comienzo del libro VII—aparentemente por ello están ausentes en VIII y IX—, y las estereométricas en el XI (por eso, tal vez, faltan en XII y XIII).

Examinemos ahora los grupos axiomáticos distinguidos.

En lo que concierne a la definición, veamos primero lo que dice al respecto Aristóteles: los atributos indicados en ella, si se los toma individualmente, deben extenderse a más objetos que al definido, no así tomados en conjunto. P.e. "la tríada" puede ser definida como "número", "impar" y "primo" en los dos sentidos de este término.¹⁵ "Número" corresponde a todos los números; "número impar" corresponde también al 5, al 7, etc.; "número primo" se aplica también al 2. Ningún otro número que el 3, en cambio, es a la vez impar y primo (*Anal.Post.* II 13, 96a₃₂).

Si aplicamos este criterio a las *hóroi* de Euclides, veremos que en más de un caso no se reúnen las condiciones citadas. P.e. I def.5, "superficie es lo que sólo tiene largo y ancho", no cumple la primera condición, ya que "largo" y "ancho" sólo pueden referirse a una superficie; ni es cumplida la segunda en I def.8, "ángulo plano es la inclinación recíproca

14. Idem p. 5-6.

15. En un sentido —el único actual— es primo el número no mensurable por otros números; en el segundo el número que no se compone de otros números (y el 1 no era "número" para los griegos).

de dos líneas sobre un plano, que se encuentran entre sí y no yacen en línea recta", pues vale también para "intersección" (además de que definir "ángulo" por "inclinación" es tautológico, al menos en tal definición). Tales definiciones resultan inútiles: no las vemos aplicadas en ninguna parte.

Hay ciertamente otros casos de definiciones infecundas, como I def. 4 ("línea recta"), I def. 7 ("superficie plana"), I def. 22 ("rombo"), etc. Cuando hablamos de infecundidad de definiciones, naturalmente, no queremos decir que nunca sean mencionados los términos respectivos, sino que la descripción hecha en dichas definiciones no es utilizada en ningún problema ni teorema: ni en forma explícita (con la misma fórmula textual o bien con una indicación que sugiera su empleo) ni tampoco implícitamente, para seguir la distinción de Neuenschwander.¹⁶ Como explicación, Heath sugiere que estas definiciones "han sido tomadas de manuales anteriores".¹⁷ No necesariamente han existido "manuales anteriores" a Euclides —sólo se los supone en base al testimonio tardío de Proclo —,¹⁸ pero definiciones ha habido ciertamente antes. Conocemos la de "diagonal" (*Menón* 85b₂), omitida por Euclides no sabemos por qué, ya que la emplea.

Kurt von Fritz señala dificultades en otro tipo de definiciones como la I def. 17: "diámetro del círculo es una recta trazada a través del centro y limitada, en cada una de las [dos] partes, por la periferia del círculo, y que divide al círculo en dos [partes iguales]". Hemos subrayado la parte final, que, dice K.v.Fritz, *sobredetermina* la definición, puesto que ya en la primera parte "el diámetro está determinado completa y unívocamente".

Un caso similar al precedente es el de III def. 1: "son círculos iguales aquellos cuyos diámetros son iguales o cuyos radios son iguales", ya que, señala K. v.Fritz podría haber sido expresada como axioma o postulado. Y en el caso de XI def. 10, "cuerpos (*stereà schémata*) iguales y similares son aquellos que están circundados por planos similares, iguales [entre sí] en cantidad y magnitud", sostiene K. v. Fritz que estamos frente a un teorema que requiere ser demostrado.¹⁹

16. E. Neuenschwander, "Die vier ersten Bücher der Elemente Euklids", en AHES 9 (1973), p. 325 ss.

17. *The 13 Books* I p. 189.

18. Que cuestionamos en nuestro trabajo "Eudemo y el 'catálogo de géometras' de Proclo", en el presente volumen *supra*, p. 43 ss.

19. APXAI 73-74 = GGAW 397-399; cf. Heath, *The 13 Books* III p. 265-266.

Kurt von Fritz remonta la explicación de estas dificultades a la clasificación aristotélica de los principios. Aristóteles daba, como ejemplo de *koiná*, la N.C. 3 de igualdad euclidea. Pero, al pasar a las *idia*, Aristóteles no dice una palabra respecto de las proposiciones de igualdad propias de la planimetría o de la estereometría. Ahora bien, con ello queda en el aire la aplicación de los axiomas generales de igualdad en las ciencias particulares. Y esas relaciones particulares de igualdad son las que suscitan dificultades en la axiomática euclidea, como las definiciones mencionadas, o el P. 4 y la N.C. 7.²⁰

Naturalmente, K.v.Fritz no quiere decir que las dificultades de la axiomática euclidea se deban a Aristóteles. Más bien, si éste no se ocupa de eso, es porque en la "matemática prearistotélica" no fue planteado. P.e. Eudoxo—a quien se atribuyen los teoremas del libro XII—ha empleado XI def.10 como un postulado.²¹

Pasemos a los postulados y a los axiomas. Proclo cita la opinión de "otros (que Gémino)", según quienes los postulados difieren de los axiomas en que "los primeros son propios (*idia*) de la geometría, los últimos comunes (*koiná*) a toda teoría acerca de la cantidad y de la magnitud" (*In Eucl.* 182, 6-8). O sea, la distinción aristotélica.

También Proclo menciona la diferenciación trazada por Gémino, para quien los axiomas se diferencian de los postulados "como los teoremas difieren de los problemas: pues tal como en los teoremas proponemos que se vea y conozca algo como la consecuencia de las cosas presupuestas, en tanto que en los problemas prescribimos que se procure construir algo", del mismo modo en los axiomas se supone lo que es evidente al conocimiento y en los postulados se supone las construcciones más simples (*In Eucl.* 178,13-179,8). Diferencia que Kurt von Fritz plantea así: los axiomas son proposiciones que establecen *relaciones*, mientras los postulados tienen que ver con la *existencia* o "producción" de p.e. los objetos geométricos más simples (línea recta, círculo); en ese sentido los postulados euclideos son como las hipótesis aristotélicas, que, a diferencia de las definiciones, dicen que algo es.²²

20. APXAI 75-76 = GGAW 399-400.

21. APXAI 88 = GGAW 413.

22. APXAI 49-51 = GGAW 373-375.

Conviene detenemos en este punto, ya que el concepto de "existencia" se presta a malentendidos. Así, A. Seidenberg malinterpreta por completo a Heath al referirse a los llamados "postulados de construcción" (= P. 1-3): Heath habría afirmado que el P. 3 (trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio) "no se refiere a una construcción en absoluto; meramente postula la existencia de un círculo con cualquier centro A y cualquier radio". Seidenberg examina la proposición inicial (I 1 de los *Elementos*, y declara: "el postulado 3 no dice nada sobre existencia: dice que uno puede trazar un círculo. Y la proposición I 1 no nos pide probar la existencia de un triángulo equilátero, sino trazar uno".²³

Naturalmente, Heath no dice nada tan absurdo como le atribuye Seidenberg, sino, por el contrario, afirma: "los tres primeros postulados declaran la *posibilidad de construir* líneas y círculos"²⁴ Y según Zeuthen, también el P. 5 es necesario, porque, sin "la existencia de la intersección" de rectas que postula, no bastarían los P. 1-3 para resolver la mayor parte de los problemas de construcción de figuras.²⁵

En general los modernos historiadores de la matemática griega están acordes en que, básicamente, los Postulados y las Nociones Comunes de Euclides corresponden en principio—como dicen "otros que Gémino"—a los *idia* y a los *koiná* de la clasificación aristotélica de las *archai*. No obstante, también concuerdan los historiadores en que los P. y N.C. euclidianos no se ajustan por completo a dicha clasificación.

Por ejemplo, el P. 4, "todos los ángulos rectos son iguales entre sí", no es un postulado sino un axioma, dado que no afirma la posibilidad de una construcción—o sea, la existencia—, sino una "propiedad esencial de los ángulos rectos" (Heath), "relaciones de igualdad" (Kurt v. Fritz).²⁶ Ciertamente, es un *idion* (geométrico) pero de igualdad.

Por su parte, las nueve N.C. se ajustan a la diferenciación señalada por Gémino, pero no a la aristotélica de ser *koiná*. P.e. la N.C. 7, "las cosas que coinciden (*epfarmózonta*) son iguales entre sí" es una proposición puramente geométrica, donde el antiguo procedimiento de "coïn-

23 "Did Euclid's Elements, Book I, develop Geometry axiomatically?", en AHES 14 (1975), p. 264-265.

24. Heath, *The 13 Books I* p. 246 (subrayado mío); cf. 124 y 195.

25. H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum* (Copenhague, 1896), extractos en ZGGM, p. 33-35.

26. Heath, *The 13 Books*, I 200; K. v. Fritz, APXA I 76 = GGAW 400: cf. Proclo, *In Eucl.* 188, 4-5 Friedlein.

cidencia" o "superposición" (*epfarmózein*) requiere incluso, regla y/o compás. También la N.C. 9, "dos rectas no comprenden un área", es un *ídion*, un principio privativo de la geometría.

No se trata, por cierto, de principios infecundos, aun cuando la N.C. 9 sólo es empleada en I 4 y la N.C. 7 también en I 4, y además en I 8 y III 24. El P. 4 es utilizado, en cambio, más de una docena de veces, entre ellas en la primera demostración del "teorema de Pitágoras" (I 47). Como los tres casos corresponden a proposiciones geométricas de igualdad, cabe recordar la explicación de K. v. Fritz (*supra* p. 84).

Ahora bien, pregunta Kurt von Fritz, ¿cómo se explica que Euclides llame "Nociones Comunes" a lo que Aristóteles denominaba "axiomas"?²⁷

En busca de una explicación, K.v.Fritz rastrea la evolución semántica del vocablo *axíoma* y de su verbo *axioûn*. En la literatura prearistotélica, dice, *axíoma* significa "honra", "estima", "justiprecio" (no da ejemplos, pero tiene sin duda en mente los de Eurípides, Tucídides, etc. dados en el Liddell-Scott). Y el verbo *axioûn* tiene originariamente la acepción de "estimar", "tener por digno" (en Eurípides, Antífote, Heródoto) y "tener por recto" (Jenofonte, *Memorabilia* II 1,9), de un modo tal, en el último caso, que equivale a "convertir en principio" ("de conducta"). Así pasa a la matemática. Aristóteles habla de "los llamados—en matemática—axiomas". (*Met.* IV 3, 1005a₂₀), lo que evidencia que los matemáticos usaban el término *axíoma*, y sin duda para un principio *koinón*. Pero ello no implica que lo hubieran hecho con el significado preciso que le confiere Aristóteles en los *Segundos Analíticos* (ya que, en el libro VIII de los *Tópicos*, Aristóteles lo emplea como un punto de partida de la discusión dialéctica). Y esa amplitud de acepciones explica que, después de Aristóteles, el término fuera aplicado por matemáticos —como Arquímedes— a otro tipo de proposiciones, y que se recurriera a otra denominación —como "Nociones Comunes" —para aquello a lo que Aristóteles llamaba *axiómata*.²⁸

4. EL ORIGEN DIALÉCTICO DE LOS AXIOMAS, SEGÚN SZABÓ

Árpád Szabó rechaza el importante papel que Kurt von Fritz adjudica a Aristóteles en la consolidación axiomática de la matemática. Está de

27. APXA I 96 y 61-62 = GGAW 421 y 385-386.

28. APXA I 29-32 y 96-97 = GGAW 351-355 y 422.

acuerdo en que la Lógica procede de la Dialéctica, y sobre todo enfatiza el origen dialéctico de la terminología axiomática.

Szabó cuestiona la "fundamentación etimológica" de la palabra *axioma* —hecha por K.v.Fritz—"sólo para el sentido supuestamente matemático de esta expresión". Toma el verbo *axioûn* y busca en los diccionarios y encuentra, entre las diversas acepciones, la de "pedir, requerir, exigir" (*bitten, verlangen, fordern*). Y sostiene que el énfasis que tradicionalmente se pone en el significado originario ("tener por digno", "tener por recto") induce a error, ya que sugiere que *axioûn* era usado respecto de demandas que eran efectivamente "tenidas sin duda por dignas", cuando lo cierto ha sido precisamente lo contrario, a saber, que su empleo se hacía en relación con peticiones "falsas" (da como ejemplos Heródoto VI 87 y Pl. Menéxeno 239e). Por lo mismo, *axioma*, "como expresión técnica de la dialéctica, significa originariamente sólo 'reclamo', 'pedido', tal como su sinónimo *aítēma*, y absolutamente nada más". Es una aserción que, en la "contraposición dialéctica", se solicita al interlocutor que la conceda; pero que no es algo que pueda ser considerado como "suposición fidedigna", sino, por el contrario, "que no era aceptada sin reservas".²⁹

Para entender mejor la interpretación de Szabó, debe tenerse en cuenta que hace remontar la "dialéctica" a Zenón de Elea (ateniéndose al fr. 65 Rose de Aristóteles). Szabó argumenta que Zenón ha sido el primero en contrastar una *hypóthesis* con otra, y en demostrar indirectamente la validez de una, al poner de manifiesto el absurdo o imposibilidad de la otra. "De estas dos cosas—aplicación de *hypóthesis* y demostración indirecta—consta principalmente la dialéctica de los eléatas; y también la dialéctica platónica no es básicamente otra cosa... que una forma posterior y tal vez más desarrollada de la dialéctica de los eléatas". En lo cual Szabó toma como testimonio el diálogo *Parménides* de Platón.³⁰

Un ejemplo de la dialéctica de Zenón, que permite explicar la fuerza de su doctrina antiempírica y su influencia en la matemática, es la aporía

29. AGM 384-386 Y BGM 284-286. La última frase que entrecomillamos la traducimos de BGM, ya que allí resulta mucho más clara.

30. AGM 333-335 y BGM 248-250.

del estadio (Arist., *Física* VI 9,239b y Simplicio, *In Phys.* 1016, 9-1019,14 Diels). Como en la mayor parte de sus aporías, vemos una *hypóthesis* en que se afirma la unidad del ser—inmóvil en el tiempo y en el espacio, o mejor, fuera de éstos—contrapuesta a otra en que se afirma la pluralidad y el movimiento en el tiempo y en el espacio. Para demostrar la verdad de la primera, Zenón prueba la falsedad de la otra.

Tenemos en el estadio tres grupos de cuatro cuerpos cada uno: un grupo AAAA en reposo, situado en el centro del estadio (el primer A más cerca del punto inicial, el último más próximo al final; un grupo BBBB que avanza hacia el punto final (el segundo B frente al primer A, y el primer B frente al segundo A) y un grupo CCCC que, a la misma velocidad que el BBBB, avanza en dirección opuesta a éste, hacia el punto inicial (el primer C frente al tercer A y el segundo C frente al último A). De ese modo, al término de su movimiento, el último de los B estará frente al primer C. Es decir, el primer B ha recorrido 4C (y el primer C 4B), pero sólo 2A (lo mismo que el primer C: éste ha recorrido el trecho frente a los dos primeros A, mientras el primer B frente a los dos últimos A). En la medida que el ejemplo permite medir una magnitud con letras, y que la velocidad es dicha la misma, tenemos que la mitad es igual al doble del tiempo.

La falacia del razonamiento de Zenón, dice Aristóteles, reside en el supuesto de que un cuerpo tarda el mismo tiempo cuando pasa a otro cuerpo (de igual tamaño) que está en movimiento y cuando pasa, yendo a la misma velocidad, a otro cuerpo (de igual tamaño) que está en reposo (*Fis.* 240a).

Pero Szabó defiende el argumento sobre la base de la aplicación de la teoría matemática de conjuntos, sugerida por Oscar Becker. El tiempo para Zenón está compuesto de "ahoras" en número infinito, y aparentemente Zenón también concibió al espacio como compuesto de infinitos puntos. Si AB es el doble de largo que CD, y estas longitudes constan de una cantidad infinita de puntos, de acuerdo con la teoría de conjuntos podemos decir que $AB = CD$, si hay entre ambos una "cardinalidad", o sea, una correspondencia entre los puntos de AB y los de CD. Por lo tanto, Zenón afirmaba correctamente que "la mitad del tiempo es igual a su doble". Con ello demostraba que nuestro "concepto intuitivo de igualdad" sólo es válido para conjuntos finitos, si bien su meta directa en esta aporía era mostrar la inconsistencia de las nociones de "movimiento", "tiempo" y "espacio"; cosa que Aristóteles, lamentablemente, no comprendió.³¹

31. AGM 399-406 y BGM 294-298.

Los ocho axiomas de Euclides (Szabó excluye el noveno—como interpolación—porque no habla de igualdad) son axiomas de igualdad, pero con un concepto de "igualdad" muy distinto al eléata: "son afirmaciones cuya verdad es controlada por la experiencia práctico-empírica, incluso en algunos casos por la percepción sensible" (p.e. N.C. 7).

Szabó compara las N.C. de Euclides con dos proposiciones de igualdad "casi matemáticas" del diálogo platónico *Teeteto* 155a: 1) "Nada se vuelve más grande ni más pequeño, ni en tamaño ni en cantidad, en cuanto sea igual a sí mismo" y 2) "Aquello a lo que nada se añade ni se quita no puede crecer ni disminuir, sino que permanece igual a sí mismo". Estas proposiciones no son llamadas por Platón *axiómata* sino *homologémata*, "cosas acordadas" sin problema, a diferencia del axioma.

Muy probablemente "los matemáticos preeuclídeos compusieron los *axiómata* de igualdad" para evitar las paradojas de Zenón. Precisamente, dado el carácter supraempírico otorgado por los eléatas a la matemática, principios empíricos de igualdad como las N.C. de Euclides fueron denominados *axiómata*, porque un matemático no los podía aceptar sin reservas. Pero Aristóteles, que malinterpretó la doctrina eléata, concibió los *axiómata* como principios de validez evidente. Euclides también, pero, consciente de que el significado usual de *axioma* implicaba reservas en su aceptación, prefirió llamar a los axiomas de igualdad "Nociones Comunes", nombre que suscitaba menos dudas acerca de la "verdad evidente" de dichos axiomas.³²

5. EL CONCEPTO DE "DIALÉCTICA" EN PLATÓN Y ARISTÓTELES

Las tesis de Szabó requieren un elucidamiento mínimo de lo que cabe interpretar como "dialéctica" en Grecia clásica y de la dependencia terminológica que, respecto de la dialéctica, haya tenido la matemática.

En Platón hallamos tres caracterizaciones explícitas de la "dialéctica" (de sumo interés, pues son las primeras apariciones, en la literatura griega, de los términos *dialektiké* y *dialektikós*, así como del infinitivo

32. AGM 390-394, 402 y BGM 288-291, 296

sustantivado *tò dialégesthai*, de sentido equivalente. A las cuales poder-
nos añadir una cuarta (cronológicamente anterior).

La primera descripción es precisada en el *Crátilo* (388b; 390d): la dialéctica trata de discernir lo que es cada cosa, su *ousía*, a través de preguntas y respuestas (cf. *Fedón* 78d₁, donde se habla de la "ousía misma, de cuyo ser damos cuenta tanto al preguntar como responder"). No hay, como en los diálogos "socráticos", una pregunta inicial —cuya respuesta deba refutarse—, sino que la pregunta por la *ousía* está en el núcleo mismo del preguntar y responder.

La segunda caracterización se halla en los libros VI-VII de la *República*: la dialéctica, a diferencia de la matemática, aprehende la *ousía* de cada cosa, dejando por completo al ámbito sensible y marcha, sólo a través de Ideas, hasta el principio fundante. Veremos estos textos más abajo; así como en el *Crátilo* el dialéctico supervisa la tarea del legislador de nombres, aquí asegura la fundamentación de la matemática.

La tercera formulación de la dialéctica aparece en los diálogos tardíos (especialmente en *Sofista*, *Político* y *Filebo*, pero también ya en *Fedro*) y consiste en la delimitación conceptual (*diaíresis*) del ámbito del discurso del filósofo, "división" que hay que practicar conforme a Ideas que ofician de pautas.³⁴

La cuarta presentación de la dialéctica (primera cronológicamente) es la de los diálogos 'socráticos', juveniles, p.e. *Laques*, *Hippias Mayor*, *Eutifrón*, *Cármides*, etc. Asistimos en ellos a preguntas, por parte del personaje "Sócrates", y respuestas, a cargo de su interlocutor. La primera pregunta concierne a una cualidad humana —cuya posesión debe acreditarse por su conocimiento—, y a través de las preguntas siguientes se refuta la primera respuesta. No obstante, todas las respuestas, por lacónicas que sean, son necesarias para proseguir el diálogo, ya que indican que *hay acuerdo sobre un punto*.

A diferencia de Platón, la dialéctica no es, para Aristóteles, filosofía (naturalmente, porque la entiende de modo diferente). El modo dialéctico (*dialektikôs*, pero también *logikôs*: *Anal. Post.* 84ab, *Tópicos* 105b) no es el que hoy llamaríamos "lógico" (Aristóteles denomina a esto *analytikôs*),

33. AGM 411-412 y BGM 301-302.

34. Cf. J. Stenzel, *Studien zur Entwicklung der platonischen Dialektik*, Darmstadt 1961 (trad. inglesa de D. J. Allan, *Plato's Method of Dialectic*, New York 1964), capítulos 6-8.

"demostrativo" o "apodíctico", como debe ser el filosófico, sino sólo "acorde a la conjetura", "probable". Por eso, los puntos de partida argumentales del dialéctico no son necesariamente "premisas verdaderas y primarias", sino solo admisibles por el interlocutor. Se trata de una "gimnasia" mental que nos prepara para la filosofía, ya que, una vez entrenados para poner dificultades de uno y otro lado, en una discusión, nos capacitaremos más para discernir lo verdadero y lo falso en cada caso (*Tóp.* I 2, 101a27 ss.)

Kapp—junto con otros destacados helenistas—hace derivar la dialéctica aristotélica (y por ende la *Lógica*) de la platónica; pero sin precisar qué es lo que derivó y cómo. Precisión necesaria, ya que la "dialéctica", incluso en sus cuatro caracterizaciones en Platón, es filosofía, como hemos visto, no en Aristóteles. "Sabemos", dice Kapp, "por ciertos pasajes de las obras posteriores de Platón, que de hecho fue éste quien inventó la noción de la gimnasia mental y quien la introdujo en la práctica de su escuela, la 'academia' original, como preparación obligatoria para los futuros filósofos".³⁵

En este párrafo Kapp mezcla, evidentemente, pasajes de *Rep.* VI-VII —que no es una "obra posterior"— sobre la formación dialéctica de los futuros filósofos con el pasaje 135d del *Parménides*, donde el personaje "Parménides" advierte al joven "Sócrates" que, para que no sea destruida la teoría de las Ideas, y con ello "el poder de la dialéctica", debe practicar una "gimnasia", de la cual sólo dice que es "la que has escuchado a Zenón". Pero en ningún momento se identifica "dialéctica" con "gimnasia"; y en cuanto a esta *gymnasia*, como se ve a partir de 137c, consiste en extraer las consecuencias lógicas no sólo de la existencia de la pluralidad—como hizo Zenón, aunque de otro modo—, sino también las de la existencia de la unidad. "Si lo Uno mismo no puede ser múltiple", dice Stenzel, subsisten las objeciones contra la "participación", "pero esta imposibilidad es precisamente posible".³⁶ No se trata, por consiguiente, de una *gymnasia* como la de los *Tópicos*.

No obstante, la dialéctica aristotélica es idéntica a la platónica, —en sus cuatro versiones— en un punto: es la práctica de un diálogo ordenado mediante reglas, la principal de las cuales consiste en lograr el consen-

35. Kapp, *La Lógica en la Grecia antigua*, p. 42.

36. Stenzel, *Studien*, p. 32.

timiento de los interlocutores sobre un tema que se está sometiendo a discusión. Que sepamos, eso sólo ha podido surgir y ser practicado en el marco de escuelas como la Academia y el Liceo.

Se puede argüir que, como hallamos testimoniado por los propios Platón y Aristóteles, ya antes que ellos los sofistas han argumentado a través de preguntas y respuestas, y cabe suponer que en éstas obtenían la aquiescencia del interlocutor. Pero el único testimonio de que han podido proceder así son los diálogos platónicos, cuyo mecanismo es socrático-platónico. La erística de que se queja Platón en algunos sofistas (caso p.e. de Dionisodoro y Eutidemo) es una disputa anárquica en la cual es lícito cualquier recurso para obtener el triunfo. Por eso dice Aristóteles que el razonamiento de los sofistas no es "dialéctico", porque no procede a partir de premisas probables sino a partir de premisas que *parecen ser probables pero no lo son* (*Soph. Elench.* I 2,165b₈).

Precisamente la Academia platónica parece haber tenido, entre sus más caros propósitos, el de organizar el estudio y discusión de los diversos temas que interesaban a matemáticos y filósofos.

Por lo dicho, consideramos infundado el intento de Szabó de remontar la dialéctica a Zenón de Elea. Que la dialéctica deba constar de aplicación de *hypothesis* y de reducción al absurdo, es sólo una hipótesis de Szabó. Éste parece conferir a tal término griego un uso platónico unívoco (error al que nos referiremos sucintamente más abajo). Jamás ha sido atribuido a Zenón de Elea, y su uso en el *Parménides* en referencia a Zenón no prueba nada, ya que en 137b₃ el personaje "Parménides", también habla de su "propia hipótesis" (y sabemos que, antes que Zenón, practicó Parménides la reducción al absurdo), y en la mayor parte de los casos se refiere a algo que los personajes "Parménides" y "Zenón" no han dicho o refutado. Sobre todo, es notorio que no podemos tomar los diálogos platónicos como testimonio de la historia del pensamiento anterior.³⁷

37. Cf. R. Hirzel, *Der Dialog I* (1895, reimpr. Hildesheim, G. Olms, 1963), p. 175-271, respecto del diálogo platónico; H. Cherniss, "The History of Ideas and Ancient Greek Philosophy" (artículo de 1953, ahora en *Selected Papers*, ed. L. Tarán, Leiden, E. J. Brill, 1975, p. 36-71) sobre el concepto de historia de las ideas en Platón y Aristóteles; y sobre la historicidad del *Parménides* platónico en cuanto a Zenón se refiere, cf. Kurt von Fritz, "Zenón de Elea en el *Parménides* de Platón", trad. Bernabé Navarro, sobretiro de *Diánoia*, 1975.

Es cierto que a menudo se incurre en la fórmula inadecuada de referirse a Parménides y a Zenón como "la escuela de Elêa". Pero si es correcto pensar a Zenón como discípulo de Parménides en algún sentido, no lo es el crear, en base a ellos, una escuela. Es posible que el fr. 65 (Rose) de Aristóteles sea auténtico, y que éste haya dicho que Zenón fue quien "descubrió la dialéctica"; es además muy propio del pensamiento de Aristóteles, pero no nos asegura en lo más mínimo la credibilidad histórica del aserto, ni Aristóteles lo pretende. Dicho texto es además muy breve (una sola proposición) y no habla de preguntas ni de respuestas: sólo nos permite inferir que *Aristóteles consideró a Zenón como el primero que argumentó partiendo de premisas probables y no de premisas indudablemente verdaderas*.

6. TERMINOLOGÍA DIALÉCTICA Y TERMINOLOGÍA MATEMÁTICA

Examinemos la cuestión del traslado de la terminología de la dialéctica a la axiomatización matemática. Como vimos, Szabó sostiene que la dialéctica, con su elaboración de terminología axiomática, precede cronológicamente a la matemática deductiva.³⁸ Por cierto que, aun cuando retrotrae la dialéctica a Zenón, Szabó piensa que ya antes había habido matemática, con Tales,³⁹ sólo que no deductiva.

Hemos afirmado que no existen fundamentos históricos para hablar de dialéctica antes de Platón y Aristóteles. Hallamos, sí, testimonios de matemática anterior: por lo menos desde Hipócrates de Quíos y Teodoro de Cirene. Y esta matemática—posterior a Parménides y a Zenón—era ciertamente deductiva. Pero no contamos con elementos de juicio (Szabó tampoco, como se ve por las palabras suyas que subrayamos en p. 78) para aseverar que p.e. Hipócrates pudo argumentar con fundamentos axiomáticos. Según nuestro punto de vista, pues, hubo matemática deductiva antes de que surgiera la dialéctica, mas no matemática axiomático-deductiva (al menos no sistematizada orgánicamente).

38. AGM 341 ss. y BGM 253 ss.

39. AGM 9, 277-278 y BGM 13, 180-181.

Ciertamente, si se concediera credibilidad al informe que Simplicio dice transcribir de Eudemo, Hipócrates habría aplicado, en su "cuadratura de lúnulas", el teorema XII 2 de Euclides (atribuido generalmente a Eudoxo), que requiere el denominado "método de exhaustión". Para admitirlo, habría que suponer el conocimiento de los P. 1 y 5 y la N.C. 8, pero además muchas otras e importantes proposiciones, como la X I (que implica, por de pronto, V def.4, "axioma de Eudoxo" o "postulado de Eudoxo-Archímedes, la I 41, III 30, V 11, XII 1, etc., que exigen principios axiomáticos como, entre otros, V def.5, P. 2 y 4, N.C. 1-3, etc. O sea, no se trataría de "algunos fundamentos", como modestamente pedía Szabó, sino de la mayor parte de la axiomática euclidea. Pero ni siquiera B.L. van der Waerden, que está dispuesto a atribuir a Hipócrates "3 postulados, 5 axiomas y (por lo menos) 14 proposiciones", piensa que el geómetra de Quíos haya podido usar el "método de exhaustión".⁴⁰

Simplicio confiesa que ha reproducido "textualmente lo escrito por Eudemo, pero añadiendo unas pocas cosas en favor de la claridad, extractadas de los *Elementos* de Euclides, ya que Eudemo, con su estilo resumido, ha hecho su exposición en relatos concisos, a la manera antigua" (*In Phys.* 60, 27-30 Diels). Esta es sin duda la razón por la que se suele leer tanta geometría euclídea en Hipócrates. Pero como ha notado Heath, su procedimiento ha de haber sido similar al de Antifonte, el de "cubrir" gradualmente los círculos con polígonos hasta "llegar al límite".⁴¹ Y para esto, como advierte el mismo Simplicio, basta con manejar el problema III 33 sobre la construcción de un "segmento de círculo", para lo cual sólo necesitamos los P. 1 y 3—no forzosamente enunciados ni explicitados—y algunas nociones de figuras, como la del triángulo isósceles, el círculo y el segmento circular. (Todavía 30 o 40 años después de Hipócrates hallamos una definición del "número par" tan empírica como ésta: "es aquel [número] que no es 'escaleno' sino 'isósceles'", *Eutifrón* 12d₉₋₁₀.) Es decir, para la "cuadratura de lúnulas" no es menester más que una "geometría de regla y compás", con ningún otro axioma que el de "congruencia" (N.C. 7), los P. 1 y 3 y algunas definiciones más o menos empíricas.

40. "Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie", en AHES 18 (1978), p. 353-354.

41 T. Heath, *A History of Greek Mathematics I* (Oxford, 1921, reimpr. 1965), p. 328.

Inspeccionemos rápidamente la cuestión de la terminología, comenzando por el vocablo *hypóthesis*, tan privilegiado por Szabó.

El uso más antiguo que conocemos de *hypóthesis* es el del tratado hipocrático *De la medicina antigua* (último tercio del s.V a.C.).⁴² Allí el autor critica escritos de medicina que, dice, han partido de "suposiciones" o "supuestos" (*hypothéseis*), tales como lo caliente o lo frío o lo seco o lo húmedo, y han pretendido explicar las enfermedades como consecuencia de una o dos de tales cosas.

En *Eutifrón* 11b-c, Platón llama *hypothéseis* a las propuestas de definición que ha dado Eutifrón sucesivamente respecto de "lo santo", y que han sido discutidas y refutadas. Cf. en *Fedón* 94b, la *hypóthesis* de Simias "el alma es armonía" (y antes, *Hippias Mayor* 302e y *Gorgias* 454c). La diferencia con el tratado hipocrático *VM* es la de que, en éste, la *hypóthesis* era un término (calor, frío), en tanto en estos ejemplos platónicos se trata de una proposición.

Los otros cinco empleos del vocablo en el *Fedón* (92d₆, 101d_{2,3,7} y 107b₃) son diferentes, ya que no sólo se trata de proposiciones existenciales (afirman la existencia de las Ideas), sino que son discutidas: en lugar de servir, como en los ejemplos precedentes, como punto de partida a una discusión sobre ellas mismas, permiten una discusión sobre otras cosas. En parte similar es el uso en *Rep.* VI-VII, donde las once veces que vemos el término (9 en la Línea, 2 en la Caverna) se refiere al procedimiento de los matemáticos, de tomar como punto de partida—en sus demostraciones—"lo impar y lo par, las figuras, tres clases de ángulos, etc." (510c₄). Como más adelante examinaremos este texto, anticipamos, por ahora, sólo que la diferencia con el *Fedón* radica en que no se trata de proposiciones —ni existenciales ni de otra índole—, sino de términos, como en *VM*. Y añadamos que Platón no dice que los matemáticos usaran el término *hypóthesis*, sino que nota que sólo el dialéctico considera tales términos como *hypothéseis*, ya que el matemático los toma por *archai*, "principios".

42. La tesis de H. Diller ("Hippokratische Medizin und attische Philosophie" en *Hermes* 80, 1952, p. 385 ss.) de que el tratado *De la medicina antigua* supone al *Menón* platónico, ya no tiene defensa posible. Sobre la ubicación cronológica de dicho tratado —así como sobre los distintos usos tempranos del vocablo *hypóthesis*— nos hemos extendido en la "Introducción" a nuestra edición bilingüe, para el centro de Estudios Clásicos de la U.N.A.M.

Como el pasaje 86e₂ y ss. del *Menón* es ya tradicionalmente asimilado al de *Rep.* VI en cuanto al término *hypóthesis*, leámoslo: se trata de ver

"*ex hypothéseos* si [la virtud] puede enseñarse o no. Digo la [expresión] *ex hypothéseos* en el sentido en que los geómetras examinan, cuando alguien les pregunta, p.e. respecto de un área, si se puede inscribir dicha área como triángulo en un círculo dado. Alguno [de los geómetras] responderá: 'no sé aún si esto es de esa índole, pero creo que se puede contar con una *hypóthesis* útil para esta cuestión, a saber, si esta área es tal que, aplicada a la línea dada [en el círculo], es deficiente por un área tal como la que se ha aplicado, me parece que sucederá de una manera, pero de otra manera si es imposible que pase eso. Por consiguiente, usando una *hypóthesis*, estoy dispuesto a decirte lo que ha de suceder en cuanto a si la inscripción de ella [= del área] en el círculo es posible o no'. También nosotros procederemos así con respecto a la virtud—ya que no sabemos lo que es ni cómo es—: usando una *hypóthesis* examinaremos si se puede enseñar o no... si la virtud es ciencia, puede enseñarse" (*Menón* 86e₂-87b₄ y 87c₅).

Aquí, a diferencia de la alegoría de la Línea, Platón atribuye el término *hypóthesis* a los matemáticos. Pero no se trata de un procedimiento axiomático (ni tampoco de poner un punto de partida para la discusión, al modo descripto más arriba), sino de la reducción de un problema complejo a otro supuestamente más simple. No se trata de una "hipótesis" ni de un "supuesto": es una "condición preliminar" de la verdad de lo que se busca. Sólo cabe decir aquí que la *hypóthesis* puede estar "sub"-puesta como los cimientos bajo la casa que se piensa construir.

En el *Parménides* el término *hypóthesis* aparece once veces, y las once en forma de proposiciones existenciales, aunque condicionales (iniciadas con la conjunción *ei*, "si"). En el primer sentido se diferencian de las cinco existenciales del *Fedón*, en cuanto, como la *hypóthesis* de Simias (de Eutifrón, etc.), son sometidas a examen. Y en el segundo se distinguen de la del *Menón*, en cuanto no se trata de una proposición condicional completa, sino sólo de la prótasis: "la *hypóthesis* presente no es 'si lo Uno es uno, qué debe inferirse', sino 'si lo Uno existe' " (*Parm.* 142c₂). La apódosis no cuenta para nada, a diferencia del *Menón*: la prótasis no es presentada como "condición" de su verdad.

En cuanto al uso de *hypóthesis* en Aristóteles, también hemos de decir algo más abajo. Pero lo que es claro es que, a diferencia del término *axíoma*, Aristóteles no dice en ningún momento que los matemáti-

cos lo hayan usado (no dice nada similar a "los llamados—en matemática—axiomas" o "los llamados axiomas comunes"). En los caps. 2 y 10 del libro I de *Anal.Post.* califica de *hypóthesis* el procedimiento de los matemáticos de postular la existencia de objetos matemáticos simples —ya veremos por qué lo denomina así—, pero no afirma que ellos mismos lo hayan pensado de ese modo y con ese nombre. Si lo afirmara, sería mucho más difícil explicar por qué Euclides —unos 30 años después— diera a tal procedimiento el nombre de "postulados" e incluyera una figura, el círculo (P. 3), cuya existencia Aristóteles no admitiría que se supusiera.

Lo expuesto muestra un solo uso atestiguado (de los no-atestiguados sería más prudente no hablar) de *hypóthesis* en la matemática preeuclidea—y en la de Euclides—, en el *Menón*. Un uso no axiomático. Axiomáticamente lo hallamos, sí, en la dialéctica platónica, también de algún modo en la dialéctica aristotélica.

El término *áiterna*, "postulado", tampoco lo hallamos registrado en la matemática preeuclidea. La primera vez que aparece es en Platón, *Rep.* VIII 566b₅, "el pedido" o "la demanda" ("del tirano"). En Aristóteles lo encontramos cinco veces, diferenciado de *hypóthesis*, en un contexto innegablemente dialéctico (*Anal. Post.* 76b-77a; cf. 86a).

Axioma es el único de estos términos que, con sentido axiomático, es atribuido a los matemáticos (por Aristóteles). La tesis de Szabó de que el verbo *axioun* era empleado, no respecto de demandas que eran "tenidas por dignas" sino todo lo contrario, no resiste un serio examen de la evolución semántica de dicho verbo, que lo hallamos tanto con signo positivo como negativo, y quizá más con *sentido neutro* (p.e. los ejemplos que Szabó pone: *Her.* VI 87, *Pl. Menéx.* 239e y *Rep.* VII 525e-526a), que hay que traducir "estimar" o "considerar". Y ya los usos euripídeos de *axioma* muestran una nítida tendencia a consagrar el uso positivo del vocablo. Ni siquiera la aparición dialéctica del vocablo en los *Tópicos* (VIII 1, 155b₁₅; 6, 160a₉) permite discernir el matiz de "aceptable sólo con reservas" que le adjudica Szabó.

No parece, pues, lícito inferir, a partir de la terminología, una relación de prioridad cronológica entre dialéctica y matemática. *Hypóthesis* aparece en la dialéctica mas no en la matemática (al menos en la axiomática). *Axioma* aparece en la matemática y en la dialéctica, en el tiempo de Aristóteles; pero de su empleo en los *Tópicos* no puede deducirse que se utilizó primero en la dialéctica, ya que sólo aparece en el

libro VIII, considerado generalmente posterior a *Anal.Post. I*. *Álgebra* lo encontramos antes de Euclides sólo en la dialéctica, y nada asegura que su presencia en Euclides se deba a ello.

De todos modos, podemos registrar algunos hechos:

- 1°) sólo a partir de Platón cabe hablar de dialéctica, al menos en el sentido (o sentidos) en que él y Aristóteles la entendieron;
- 2°) la primera obra matemática en que hallamos un conjunto axiomático de principios de la demostración es la obra de Euclides;
- 3°) las referencias de Platón y Aristóteles a la matemática de su tiempo muestra que en ésta se estaban realizando considerables esfuerzos para proveerse de bases axiomáticas;
- 4°) tanto Platón como Aristóteles, en sus diversos tipos de "dialéctica", emplean términos para designar procedimientos axiomáticos que también atribuyen a los matemáticos.

Sobre la base de estos cuatro hechos, podemos hacer una conjetura. Al comienzo del siglo IV a.C. —tras declinar el "iluminismo" de los sofistas— filósofos y matemáticos sintieron necesidad de poner un límite a las casi infinitas posibilidades argumentales en cada ámbito temático. La Dialéctica de Platón —inicialmente inspirada por Sócrates— y sobre todo la Lógica de Aristóteles buscaron no sólo estipular reglas para ordenar la discusión sino establecer principios en los cuales pudiera apoyarse la demostración. Dada la proximidad existente entonces entre matemáticos y filósofos (en nuestros testimonios Arquitas, Teeteto y Eudoxo aparecen vinculados con Platón) y el deseo de los matemáticos de que sus demostraciones gozaran de mayor universalidad, se produjo una transferencia parcial de reglas y principios de la Dialéctica platónica y de la Lógica aristotélica a la matemática. También pudo haber transferencia terminológica, pero no necesariamente. En efecto, una vez intensificado el proceso de axiomatización de la matemática, ha de haberse creado en ésta un vocabulario técnico que también pudiera convenir a la filosofía.

7. LA NOCIÓN SUPRAEMPÍRICA DE "IGUALDAD"

Hemos examinado la tesis de Szabó en lo referente al concepto de "dialéctica", su antigüedad, su relación cronológica con la matemática axiomático-deductiva y su terminología.

Pero queda un importante punto de su tesis, según el cual los axiomas euclideos de igualdad son verificados "por la experiencia práctico-empírica, en algunos incluso por la percepción sensible" (cf. *supra* p. 89), y por ello contrapuestos a los dos *homologemata* del *Teeteto* 155a.

Evidentemente, Szabó pasa por alto un importante y debatido pasaje del *Fedón*: "¿Decimos que hay algo Igual? No me refiero a un leño igual a otro leño, ni a una piedra igual a otra piedra, ni a ninguna otra cosa de esa índole, sino a algo distinto, fuera de todas esas cosas, lo Igual en sí... ¿hay acaso ocasiones en que las cosas Iguales en sí mismas (*autà tà ísa*) te parezcan desiguales, y la Igualdad desigualdad?" (74a₃-c₂). La insólita expresión *autà tà ísa* ha sido objeto de complicadas interpretaciones e interminable polémica.⁴³ La interpretación más lógica parece ser la de que el plural hace referencia al hecho de que la igualdad exige dos o más cosas (ya que aún no habla Platón de algo "igual a sí mismo"). No se trata de dos o más cosas determinadas, como "leños" o "piedras", ya que lo que está en juego no es el carácter de leño en tanto leño ni el de piedra en tanto piedra, sino su relación de igualdad. Por lo tanto, podría expresarse también de este modo: " $x = x$ ".

En el pasaje platónico, pues, está explícitamente afirmado el carácter supraempírico de la verdadera igualdad. Por lo mismo, no se ve cómo las N.C. podrían ser derivadas de o controladas por la experiencia. Cuando Szabó dice "en algunos casos por la percepción sensible" sólo puede tener en mente la N.C. 7, que proviene —como ha señalado K.v.Fritz— de un período de la historia de la geometría en que aún no se contaba del todo con la prueba deductiva. Pero no es lícito extender su índole empírica a las N.C. 1-6 (y tampoco a la 8), que son enunciados *a priori*. El concepto de "parte" implica para Platón el de "todo" (cf. *Cármides* 165e₃), como el de "menor" implica el de "mayor" y el de "mitad" al de "doble"; de modo que la N.C. 8 no supone ninguna experiencia práctica.

43. Que va —en el tiempo— por lo menos desde D. Tarrant ("Plato's *Phaedo* 74 a-b", en *Journal of Hellenic Studies* 77, 1957, p. 124-126) hasta por lo menos M.W. Wedin ("autà tà ísa and the Argument at *Phaedo* 74 b7-c5", en *Phronesis* XXII N° 3, 1977, p. 191-215). En la medida que esta cuestión es relacionada con la de *autà tà hómoia* en el *Parménides*, cf. B. Calvert, "A note on Plato's *Parmenides* 128e5-130a2", en *Mnemosyne* IV, 35, 1-2, 1982, p. 51-59. En lo concerniente al *Fedón*, la polémica abarca cuestiones como la de si *autà tà ísa* son cosas sensibles, o bien entes matemáticos, o "Ideas-copias", o lisa y llanamente Ideas; y en caso de ser Ideas, si una, dos o más.

8. LA *ARCHÈ ANYPÓTHETOS* Y LAS *HYPOTHÉSEIS* EN LA ALEGORÍA DE LA LÍNEA

Puesto que hemos estado hablando del aporte de Platón y de Aristóteles a la axiomatización de la matemática, pero sólo hemos especificado lo que, de acuerdo con Kurt von Fritz, constituye el de Aristóteles, corresponde que digamos lo que entendemos ha sido la contribución platónica.

Para conveniencia de la exposición, presentamos nuestra traducción de algunos de los pasajes más importantes sobre el asunto.

"Por un lado, [en la primera parte de la sección inteligible de la línea], el alma, sirviéndose como imágenes de las cosas antes imitadas [o sea, de las cosas sensibles], se ve forzada a indagar a partir de supuestos (*hypothéseis*), marchando no hasta un principio sino a una conclusión. Por otro lado, [en la segunda parte] avanza hasta un principio no supuesto (*anypóthetos*), a partir de un supuesto y sin [recurrir a] imágenes —como en el otro caso—. haciendo el camino con Ideas mismas y por medio de ellas [...]

Creo que sabes que los que se ocupan de geometría y de cálculo suponen (*hypothémenoi*) lo impar y lo par, las figuras y tres clases de ángulos y cosas afines, según lo que investigan en cada caso. Como si las conocieran, las adoptan como supuestos, y de ahí en adelante no estiman (*axiôûsi*) que deban da cuenta (*lógon... didónai*) de ellas ni a sí mismos ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera; antes bien, partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir en aquello que proponían al examen [...]

[...] Sabes, pues, que se sirven de figuras visibles y hacen discursos (*lógous... poioûntai*) acerca de (*peri*) ellas, aunque no pensando (*dianoôúmenoi*) en (*peri*) éstas sino en aquellas cosas a las cuales éstas se parecen, discuriendo (*lógous... poioúmenoi*) en vista al Cuadrado en sí y a la Diagonal en sí, y no en vista de la que dibujan, y así con los demás. De las cosas en sí que configuran y dibujan hay sombras e imágenes en el agua, y de estas [cosas que dibujan] se sirven como imágenes, buscando divisar aquellas cosas en sí que no se podrían divisar de otro modo que con el pensamiento" (*Rep.* VI 510b₂-511a₁)[...]

"Quieres distinguir lo que de lo real (*toû óntos*) e inteligible (*noetoû*) es estudiado por la ciencia dialéctica, como siendo más claro que lo estudiado por las llamadas técnicas, para las cuales los supuestos (*hypothéseis*) son principios (*archai*). Y los que los estudian se ven forzados a estudiarlos por medio del pensamiento discursivo (*diánoia*), aunque no por los sentidos. Pero a raíz de no hacer el examen avanzando hacia un principio (*archê*) sino a partir de supuestos, te parece que no poseen inteligencia (*noûs*) acerca de ellos, aunque sean

inteligibles junto a un principio. Y creo que llamas 'pensamiento discursivo' (*diánoia*) al estado mental de los geómetras y afines, pero no 'inteligencia'; como si el 'pensamiento discursivo' fuera algo intermedio entre la conjetura (*dóxa*) y la inteligencia" (*Rep.* VI 511c₄-d₅).

La dificultad principal de estos pasajes—y acaso por la misma razón, su clave—reside en la relación entre los conceptos de *hypóthesis* y de *archè anypóthetos*, que hemos vertido, respectivamente, por "supuestos" y "principio no-supuesto". ¿A qué se refieren las *hypothéseis*? Hace ya más de ochenta años Natorp afirmó que éstas son aquí Ideas.⁴⁴

Kurt von Fritz ha argumentado, contra Natorp, 'que los *eíde* [es decir, las Ideas,] son los objetos de la sección superior del ámbito de los *noetá* [o sea, de los objetos inteligibles], pues corresponden a los originales entre los *noetá*'.⁴⁵ Es decir, K.v.Fritz considera la "especie inteligible" de la línea de modo análogo al que Platón hace con la "conjeturable", donde la primera parte era una imitación de la segunda. Platón dice también que la tercera sección de la línea, esto es, la primera de lo inteligible, es imitada en la segunda de lo conjeturable (o más literalmente, "se sirve" de lo conjeturable "como imágenes"). Lo que ciertamente *no dice* es que la sección última y superior de lo inteligible contenga los originales de la sección inferior de lo inteligible: esto Kurt von Fritz lo infiere por analogía.

Friedrich Solmsen sostiene, por su parte, que las *hypothéseis* "de las que habla Platón aquí, donde solo quiere concebir teóricamente un método manejado en la práctica, son los triángulos, ángulos, etc. de las figuras dibujadas, en las cuales encuentra proyectados los *eíde* correspondientes. Para los matemáticos prácticos aquéllos son los objetos—sobreentendidos y no problemáticos— de sus demostraciones o experimentos. Pero a este acto de dibujar p.e. un triángulo, a los fines de la demostración, Platón otorga el significado, completamente nuevo, de un establecimiento de Ideas".⁴⁶ Es decir, según Solmsen, el matemático lle-

44. P. Natorp, *Platos Ideenlehre*, Darmstadt, Wiss.Buchg. 3a.ed. reprod. de la 2a. de 1922 (la 1a. fue de 1902), 1961, p. 192-193.

45. K.v.Fritz, PTAM 52.

46. Solmsen, *Die Entwicklung der Aristotelischen Logik und Rhetorik*, Berlín, Weidmann, 1929, p. 96-97. K. v. Fritz PTAM, 39 y ss., afirma que Solmsen identifica las *hypothéseis* mencionadas en *Rep.* VI con las figuras que el geómetra dibuja. Si es eso lo que realmente Solmsen quiere decir, hay que admitir que lo leemos mucho más claro en la interpretación de K. v. Fritz sobre Solmsen.

ga al umbral mismo del ámbito de las Ideas, pero allí no da la cara a éstas sino a lo sensible, de modo tal que sus *hypothéseis* —que para el dialéctico son Ideas— se convierten en dibujos.

Kurt von Fritz objeta a Solmsen que en *Rep.* 510b se ha dicho que también el dialéctico, que llega al principio, avanza a partir de una *hypóthesis*, "sin imágenes", por lo cual no puede ser que las *hypothéseis* sean "imágenes".⁴⁷

Cuando le toca el turno de dar su propia opinión, la claridad de K.v.Fritz se torna opaca: "En la subdivisión de los *noetá*, los *eide* desempeñan un doble papel. Sin duda han de formar los objetos de conocimiento de la sección superior de este ámbito. Pero parecen estar también de cierto modo en la inferior, aunque la analogía exige ahí otra cosa; a esto a su vez corresponde que allí su carácter sea otro. No parece haber habido aún, para Platón mismo, una solución completa de esta dificultad, cuando escribió el libro VI de la *República*; de ahí que tampoco aquí podamos darla. Pero bien podemos mostrar dónde la ha buscado Platón en una fase posterior de su desarrollo". Y emprende el análisis de la denominada 'digresión filosófica' de la *Carta VII* —cuya autoría, especialmente en cuanto a ese punto, ha sido cuestionada—, escrita, en el mejor de los casos, veinte años después que *Rep.* VII.⁴⁸ Pero como se trata de dos exposiciones no sólo distantes entre sí en el tiempo, sino distintas en forma e intención, la explicación de una por la otra oscurece el significado de ambas.

Lo que dificulta a Kurt von Fritz, a nuestro juicio, la comprensión cabal de la alegoría de la Línea, es su rechazo de la transparente equivalencia de la *arché anypóthetos* con la Idea del Bien. En rigor, el único argumento que da contra tal equivalencia es el de que, si se pone a la cabeza de los *noetá* u "objetos inteligibles" el Bien, habría que hacer lo propio—en vista de la alegoría del Sol—en la sección "conjeturable" de la Línea con el sol, cuando "no es ése el caso, ya que allí están los múltiples originales del mundo de la percepción".⁴⁹

47. PTAM 40-41, 46.

48. PTAM 55-60.

49. PTAM 54.

En primer lugar, debe señalarse que la alegoría de la Línea no es ontológica sino epistemológica: no habla de objetos (aunque su mención a los seres vivos y cosas inanimadas y artificiales, en la segunda parte de lo "conjeturable", impide una claridad total, sino de procesos de conocimiento. No menciona objetos tales como *tà horatá* ("las cosas visibles") y *tà noetá* ("las cosas inteligibles"); sólo se refiere a la "especie" "visible" (*horatón*) y a la "inteligible" (*noetón*). El plural sólo lo hallamos —pero sin sustantivar— al leer que las *hypothéseis* "son inteligibles junto a un principio" (*Rep.* 511d₂).

Por lo mismo, la objeción de K.v.Fritz a Natorp, en el sentido de que las Ideas son los *noetá* originales de los *noetá* inferiores (que hemos visto que no es algo que Platón diga) no es una hipótesis plausible. K.v.Fritz acude impropriamente a la alegoría del Sol para afirmar la inequivalencia de la *arché anypóthetos* con la Idea del Bien. No sólo decimos "impropriamente" porque la Línea tiene carácter epistemológico y el Sol ontológico, sino también porque en el Sol no se habla de "dialéctica"—ni ascenso alguno—, ni de *arché*, *hypóthesis*, etc. En cambio, esto sí lo hallamos en la explicación epistemológica de la Caverna, que precede o anuda a la pedagógica, y es, en sus pasajes centrales, un claro correlato de la Línea.

"Cuando se intenta, por medio de la dialéctica, llegar a lo que es en sí misma cada cosa, sin ninguno de los sentidos y por la razón, y no se ceja antes de captar, con el pensamiento mismo, lo que es el Bien en sí, con él se arriba al término de lo inteligible" (*Rep.* VII 532a₅b₂).

"Mientras [los geómetras] se sirven de supuestos (*hypothéseis*), dejando éstos inamovibles, no pueden dar cuenta (*lógon didónai*) de ellas, Pues si no conocen el principio (*arché*), y anudan la conclusión y los [pasos] intermedios a algo que no conocen, ¿qué artificio convertirá a semejante encadenamiento en ciencia?... Por consiguiente, el método dialéctico es el único que marcha, cancelando los supuestos, hasta el principio mismo" (VII 533c_{1,8}).

Como se advierte, los términos y las expresiones son los mismos que en la Línea, y la *arché* hasta la que llega la dialéctica —gracias a la que puede "dar cuenta" de las *hypothéseis*— es la Idea del Bien.

Ahora bien, según el texto de la Línea (*Rep.* 510d-e), el geómetra habla y piensa en el Cuadrado en sí y en la Diagonal en sí (y el aritmético

"está obligado a discurrir sobre los Números en sí", VII 526d₆), no en el cuadrado y en la diagonal que dibujan. Y cosas en sí, para Platón, son Ideas, son *ousíai*. ¿Piensa el matemático en Ideas, en *ousíai*?

Supongamos que los geómetras enunciaran un teorema como el I 34 de Euclides, "los lados y los ángulos opuestos de un cuadrado son iguales entre sí y la diagonal lo divide en dos [partes iguales]". (El teorema habla, en verdad, de "áreas paralelogramas"; pero como el cuadrado es una de ellas, para el caso es lo mismo.) El enunciado implica por de pronto una definición de "cuadrado" y una de "diagonal"; la primera la hallamos en I def. 22 —no así la de "paralelogramo"—, pero también la tenemos en el *Menón*, poco antes de la definición de "diagonal"—que no sabemos por qué no figura en Euclides—que se atribuye a los "sofistas" en 85b2. Pero dicho enunciado supone algo más: un *cuadrado perfecto* y una diagonal perfecta, que lo divida en dos partes *exactamente iguales*. No se trata de suponer la existencia ontológica de objetos tales, ya que los matemáticos no son metafísicos. Tampoco de la existencia matemática del cuadrado y de la diagonal, como en el caso de una *hypóthesis* aristotélica (que no incluiría, por lo demás, cuadrados y diagonales, sino cosas más simples, como puntos y líneas). Simplemente los matemáticos, para operar con cuadrados, diagonales, círculos, etc., necesitan pensarlos como perfectos, aunque lo que dibujen no lo sea.

Ahora bien, Platón parece quejarse de que los matemáticos "no estiman (*axiôûsi*) que deban dar cuenta" de lo impar y lo par, las figuras, etc. "ni a sí mismos ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera" (*Rep.* 510c₇; adviértase el significativo empleo de *axiôûsi* —no tenido en cuenta por K.v.Fritz ni Szabó— en un contexto axiomático; cf. *Rep.* 533c). Hay quienes, como Szabó, interpretan que Platón está pidiendo definiciones de "par", "impar", etc.⁵⁰ Pero ya vimos una definición juvenil de lo par (en *Eutif.* 12d₈₋₁₀), que innegablemente anticipa a la euclídea, que figura textualmente en *Leyes* X 895e₂₋₇. Y las definiciones de "cuadrado" y "diagonal" que leemos en el *Menón* muestran que Platón conocía definiciones matemáticas suficientes como para no acusar a los matemáticos de no darlas.

Más bien, pensamos nosotros, puesto que Platón advierte que los matemáticos parten, en sus demostraciones, de números perfectos, figu-

50. AGM 300 y BGM 224.

ras perfectas, relaciones perfectas, la explicación que Platón ha de estar pidiendo es la del *ser perfectas de estas cosas*. No se trata de un reproche a los matemáticos por no dar esas explicaciones. Éstas incumben a la dialéctica: lo que Platón señala es que, mientras no se den y uno se maneje con "supuestos", subsiste una falencia que impide hablar de *epistémē*, "ciencia", en sentido estricto. Esta falencia sólo puede superar la dialéctica.

En la alegoría del Sol se establece el carácter fundante de la Idea del Bien: "a las cosas cognoscibles [esto es, a las Ideas,] no sólo les adviene, del Bien, el ser conocidas, sino el existir (*tò eînai*) y la esencia (*ousía*), aunque el Bien no sea *ousía*, sino que excede a la *ousía* en dignidad y poder" (VI 509b₆₋₁₀). Ciertamente, como hemos dicho, la alegoría es epistemológica y no ontológica, como la del Sol, por lo que no cabe esperar que en la Línea la *arché anypóthetos* confiera el ser a las Ideas. Pero la dependencia entre el Bien y las demás Ideas es la misma, pues la Idea del Bien no es meramente ética —como a veces se la ha malinterpretado— o ético-metafísica, sino un *principio de perfección* en todos los ámbitos en que se presente. Como las Ideas son, en sí mismas, lo perfecto en su género, en el Sol deben al Bien su ser.

En la sección inteligible de la Línea sólo tenemos Ideas de objetos matemáticos —cuya existencia no se plantea separada de la de las restantes Ideas—, como el Cuadrado en sí y la Diagonal en sí. La perfección epistemológica con que pueden y deben ser pensados dichos objetos deriva también del Bien como principio de perfección. Sólo a su luz puede, por tanto, darse cuenta de esos objetos matemáticos perfectos, explicarlos o fundamentarlos.

Platón dice (*Rep.* 510c) que los matemáticos "suponen lo impar y lo par, las figuras", etc. Y vemos que, aunque Platón dice que estas cosas son para el matemático "supuestos", *hypothéseis*, para Platón mismo estas cosas son Ideas, lo cual no es advertido por el matemático en tanto matemático. Detrás de las *hypothéseis* hay ocultas, pues, Ideas. Y éstas quedan enmascaradas no sólo para los matemáticos sino para los demás. ("ni a sí mismos ni a los demás"). Y si revisamos nuevamente los usos del término *hypóthesis* en Platón, notaremos que este enmascaramiento yace implícito de algún modo en cada caso. Claro que el que usa el término *hypóthesis* ya está, por eso mismo, consciente del ocultamiento. Pero no es ése el caso del matemático de la Línea, pues Platón, como vimos, no dice que emplee el vocablo ni el concepto.

El ascenso hasta la *arché* también se efectúa a partir de supuestos. Esto es claro: el filósofo examina la naturaleza del objeto oculto en la *hypóthesis* del matemático. P.e. al examinar el cuadrado perfecto en que piensa el matemático halla una notable diferencia con cualquier cuadrado que se pueda ver o dibujar, y lo considera como el Cuadrado en sí, la *Idea* de Cuadrado. El que este ascenso sea hecho "con Ideas mismas y por medio de ellas" (*Rep.* 510b) sólo permite sospechar —ya que aquí no se establece ninguna jerarquización entre Ideas, salvo entre todas éstas y el Bien— que la comparación de unas Ideas con otras arroje cada vez más luz, hasta acceder a la fuente de su perfección, el Bien.

No es improbable incluso que Platón haya concebido la teoría de las Ideas de un modo como el descrito en el ascenso dialéctico, a partir de la observación de la tarea de los matemáticos. En el *Fedón* parece claro que la *Idea* de Justicia, lo Justo en sí, la justicia perfecta que no hallamos en el mundo circundante, ha sido pensada por Platón a imagen y semejanza de lo Igual en sí o Igualdad.

De acuerdo con lo dicho, la dialéctica es una "meta-ciencia" o una "filosofía de la ciencia", aunque Platón sólo la llama "ciencia", es a la vez una ciencia fundante de las matemáticas. Naturalmente, no pretendemos que la dialéctica sea para Platón sólo epistemología, ni aunque nos restrinjamos a la *República* solamente. La dialéctica es metafísica, como lo muestra claramente la alegoría del Sol, pero también ética y política, como se ve en la alegoría de la Caverna. En la alegoría de la Línea, y en la explicación epistemológica de la Caverna también, la dialéctica es filosofía de la matemática.

9. LA CRÍTICA ARISTOTÉLICA A LA CONSIDERACIÓN EMPIRISTA DE LA GEOMETRÍA

Kurt von Fritz sostiene que el capítulo 10 del libro I de los *Segundos Analíticos* contiene, en más de un punto, una réplica de Aristóteles a la referencia de Platón a los matemáticos en *Rep.* VI 510c y ss. Dada la importancia del texto, lo traducimos íntegramente.

"Llamo 'principios' (*archai*) en cada género [científico] a aquellas cosas que no se pueden demostrar. Se supone (*lambánetai*) el significado tanto de los primeros [principios] como de lo que deriva de ellos. La existencia, por el

contrario, es supuesta necesariamente respecto de los principios, pero en cuanto a las demás cosas hay que demostrarla. P.e. [suponemos] qué [significan] 'unidad', 'lo recto' y 'triángulo'; en cambio, suponemos la existencia de la unidad y de la magnitud, pero el resto debe ser demostrado.

[Los principios] de los cuales se sirven las ciencias demostrativas son [de dos clases]: los particulares (*idia*) de cada ciencia y los comunes (*koiná*), aunque son comunes por analogía, puesto que [cada uno] es útil en cuanto [se lo aplica] en el género que corresponde a la ciencia [particular]. [Principios] particulares son p.e. que la línea es de tal manera y la recta [de tal otra, etc.]. [Principios] comunes son p.e. que cuando se sustraen cosas iguales a cosas iguales las cosas restantes son iguales. Es suficiente [suponer] cada uno de estos [principios, sólo] en lo concerniente al género [particular]. En efecto, se logrará lo mismo aunque no se los suponga en toda su extensión, sino sólo [para el geómetra] respecto de magnitudes y para el aritmético respecto de números. Son particulares [de cada ciencia] aquellas cosas cuya existencia la ciencia supone, y cuyos atributos esenciales (*tà hypárchonta kath'hautá*) estudia. Así, en la aritmética las unidades y, en la geometría los puntos y líneas; de estas cosas, en efecto, suponen la existencia y al ser de tal manera. Pero de sus atributos esenciales se supone [sólo] lo que significa. P.e. la aritmética [supone] qué [significa] 'impar', 'par', 'cuadrado' o 'cubo' y la geometría qué lo 'irracional', el 'desviarse' o 'inclinarse' [de una recta]; pero que existen, debe demostrarse por medio de los [principios] comunes y de las [proposiciones ya] demostradas" (*Anal.Post* I 10,76a₃₁-b₁₀).

"Los términos (*hóroi*) no son hipótesis, porque no dicen que algo existe o no existe, sino que las hipótesis [están] en las proposiciones, mientras a los términos sólo es necesario comprenderlos; y eso no es una hipótesis, salvo que se afirme que lo que se escucha [y comprende] es una hipótesis. Más bien [hay hipótesis cuando, supuestas] ciertas cosas, en razón de estar [supuestas], se produce la conclusión. Y el geómetra no hipotetiza (*hypotithetai*) falsamente, como dicen algunos que sostienen que no se debe recurrir a la falsedad, y que el geómetra habla falsamente cuando dice que la [línea] dibujada es de un pie [de largo] o que es recta cuando no es de un pie ni es recta. El geómetra no concluye nada del ser de la [línea] particular que ha mencionado, sino de aquellas cosas que, por medio de sus [dibujos] han sido ilustradas" (*Anal.Post* I 10, 76b₃₅-77a₃).

En el pasaje 76b35ss. hemos seguido la propuesta de F.Solmsen y de K. y Fritz, de que *hóroi* significa "términos" y no "definiciones", como dicen D. Ross y la casi totalidad de los traductores (así como de que *protáseis* es "proposiciones" más bien que "premisas"); no porque tomemos partido en la disputa, sino para poder seguir mejor la tesis de K. v. Fritz. Y hemos diferenciado *lambánein* de *hypotithénai*, traduciendo el primero por "suponer" y el segundo por "hipotetizar", de modo que todo "hipotetizar" sea

un "suponer", pero no todo "suponer" sea "hipotetizar" (se "hipotetiza" sólo la existencia; el significado sólo se "supone").

Dice Kurt von Fritz que sería demasiada coincidencia que Aristóteles ponga aquí los mismos ejemplos que Platón en *Rep.* 510c. "lo impar y lo par"; "el desviarse" (K.v.F. traduce "estar quebrado") y "el inclinarse" "de las líneas" son, afirma, aquello "por medio de lo cual son engendrados los ángulos y luego las figuras". "Lo que aquí quiere decir Aristóteles es que lo impar y lo par en la aritmética y los ángulos en la geometría no son los fundamentos de la demostración de los cuales parten los matemáticos". Estos fundamentos "consisten más bien en proposiciones" "en las cuales aparecen aquellos términos, y sobre los objetos que con ellos son designados, pero no consisten precisamente en aquellos términos".

Respecto del pasaje 76b₃₅-77a₃, K.v.Fritz halla una clara confirmación de que Aristóteles se está refiriendo a *Rep.* VI, en este caso al pasaje 510d₅e: "Aristóteles se vuelve aquí contra la objeción de que el geómetra parte de falsos principios cuando supone que una línea (dibujada), que no es recta, es recta. Esta objeción, dice Aristóteles, no está bien fundada, puesto que el geómetra no basa su conclusión en que la línea (dibujada) que ha designado como recta es recta. En el lenguaje de la teoría aristotélica de la demostración esto es exactamente lo mismo que, al fin del libro VI 510d, había expresado Platón diciendo que los matemáticos practicaban sus investigaciones en las figuras dibujadas pero no sobre las figuras dibujadas, sino sobre el Cuadrado como tal y sobre la Diagonal en sí. Todo esto en conjunto excluye cualquier duda de que Aristóteles, en la mayor parte del capítulo 10, se opone a las explicaciones de Platón al final del libro VI de la *República*".⁵¹

La tesis de Kurt von Fritz es no sólo novedosa e incitante: a nosotros nos dice algo sobre lo que piensa respecto del papel que cabe a Platón en la axiomática euclidea.

Examinemos primeramente lo que concierne a la identidad o similaridad de ejemplos (de *Seg.An.* 76b₈ y de *Rep.* 510c₄).

Evidentemente, Kurt von Fritz debe forzar la elección de ejemplos aristotélicos para hacerlos coincidir con los platónicos.. Desde el comienzo del capítulo 10 se ejemplifica con "unidad", "recto", "triángulo", "uni-

51. APXA I 38-42 = 361-365, subrayado del autor. Al parafrasear el segundo pasaje aristotélico, K. v. Fritz suple entre paréntesis "dibujada"; pero la palabra que Aristóteles omite es "línea".

dad", "magnitud", "línea", "recta", N.C. 3 (76a₄₁), nuevamente "unidades" (o "números", como interpreta Ross), "punto", "línea", "impar", "par", "cuadrado", "cubo", "irracional", "desviarse" o "inclinarse" de una recta. Como aquí "cuadrado" y "cubo" no son figuras —K.v. Fritz traduce "números cuadráticos" y "cúbicos"—, fuera del "triángulo" no vemos otra figura. No se entiende por qué hay que atenerse al pasaje donde se habla de "lo impar y lo par", e interpretar que allí el "desviarse" o "inclinarse" hablan de figuras.

Si Aristóteles pensó que, cuando Platón dice que los matemáticos toman como *hypóthesis* lo impar y lo par, quería decir con *hypóthesis* lo mismo que él (que él en *Anal.Post.* I 10), no podría haberlo aceptado, ya que "impar" y "par" son "atributos esenciales", y de éstos sólo cabe suponer su significado, pero no hipotetizar su existencia. Pero no podría haber hecho la misma objeción respecto de las "figuras y tres clases de ángulos" (la existencia de las figuras debería demostrarse —o sea acreditar la posibilidad de su construcción— por no considerarlas suficientemente simples —a diferencia de Euclides—, pero probablemente no habría cuestionado los ángulos).

Por lo demás, desde el comienzo del cap. 10 hasta 76b₁₀, Aristóteles no da señales de estar discutiendo con nadie. Describe cómo proceden los matemáticos, en parte, y en parte cómo desearía que procedieran. Pero hasta las palabras "como dicen algunos" (76b₄₀) no hay indicio alguno de diálogo o debate.

Examinemos ahora la sección que sí presenta signos polémicos.

Indudablemente, el pasaje 510d de *Rep.* VI ofrece más de una dificultad, porque tanto la expresión *lógos poieisthai* ("hacer discursos" o "discurrir") como la preposición *peri* ("acerca de", "en": d₉) son aplicadas allí a la vez a las "figuras visibles" y a "aquellas cosas a las cuales éstas se parecen". Pero la interpretación del pasaje por K.v. Fritz (donde traducimos *an* por "en" y *über* por "sobre") parece ser la única posible, y nosotros además la compartimos plenamente. Ambos, Platón y Aristóteles, dicen que el geómetra investiga *en* las figuras dibujadas pero no *sobre* éstas (cf. 76b₄₁-77a₃).

Lo que no se entiende es por qué dice K.v. Fritz que "Aristóteles se vuelve aquí contra la objeción", etc. Especialmente que en seguida dice que "esto es exactamente lo mismo que" había dicho Platón; a pesar de lo cual insiste en que esto confirma que Aristóteles "se opone a las explicaciones de Platón".

Que las *hypothéseis* de los matemáticos sean para Platón términos y no proposiciones como las de Aristóteles, cabe poca duda. Pero no es eso lo que Aristóteles discute cuando rechaza la afirmación aludida con el "como dicen algunos": allí se refiere a la crítica de los que entienden que el geómetra infiere en base a dibujos.

Hay por lo menos uno o dos pasajes aristotélicos similares al que estamos viendo.

Así, en *Metafísica* N, donde está atacando presumiblemente al Platón del *Sofista*, que ha dicho que el "no-ser" es lo falso (el sofista, al hablar falsamente, dice "lo que no es"), declara:

"Se pretende que 'lo que no es' quiere decir lo falso (*tò pseûdos*) y tal naturaleza, de donde —y de 'lo que es'— [deriva] la multiplicidad de las cosas, por lo cual también se afirmaba que es necesario hipotetizar algo falso, así como también los geómetras [hipotetizan] que es de un pie [de largo] la [línea] que no es de un pie, pero es imposible que esto sea así, pues los geómetras no hipotetizan nada falso" (*Met.* XIV 2,1089a²⁰⁻²⁴; cf. *Anal.Priora* I 41, 49b³⁴⁻³⁷ y *Anal.Post.* I 31, 87b³⁵⁻³⁷).

Dice Cherniss, al comentar este pasaje de *Met.* N, que, al afirmar Aristóteles que para Platón el "no-ser" es lo falso, está remitiendo sin duda al *Sofista* 237a. "Pero que la sentencia siguiente signifique que Platón mismo enunció la analogía entre la presuposición de *tò pseûdos* y el método de los geómetras, no es de ningún modo obvio. No puede rastrearse tal afirmación en Platón, quien, al contrario, habla de la relación entre las figuras usadas por el geómetra y su demostración exactamente a los mismos efectos que Aristóteles mismo (cf. *Rep.* 510d-e con *Anal.Post.* 77a₁₋₃)... La discusión de que la geometría deriva sus demostraciones de premisas falsas, sin embargo, es introducida en *Anal.Post.* 76b₃₉-77a₃ como la de una cierta gente que en el pasado... atacó el procedimiento geométrico en ese sentido; en *Met.* 998a₂₋₄, el argumento de que la geometría usa supuestos falsos de tal clase es explícitamente atribuido a Protágoras en su refutación de los geómetras".⁵²

52. H. Cherniss, *Aristotle's Criticism of Plato and the Academy*, New York, 2a. ed., reimpr. de la de 1944, 1962, p. 97-101.

Veamos ahora el texto en que Aristóteles nombra a Protágoras.

"En efecto, no existen líneas sensibles tales como aquellas de que habla el geómetra; pues ninguna de las cosas sensibles es del modo [en que habla el geómetra], recta ni curva, y *el círculo es tocado por la tangente no en un [solo] punto, sino tal como decía Protágoras al refutar a los geómetras*" (Met. III 2, 997b₃₅-998a₄).

De las observaciones formuladas y el cotejo efectuado de textos surge, como corolario, que Aristóteles no ha hecho ninguna referencia crítica—en Seg. Anal. I 10— a Platón. Si podemos hallar en ese texto un rechazo a críticas hacia geómetras —como sucede en 76b₃₉-77a₃— debemos pensar que la alusión es a Protágoras, o a sofistas o pseudofilósofos del siglo IV que mantuvieran a ultranza la tesis de Protágoras.

Pero la comparación del pasaje platónico con el aristotélico no sirve sólo para aceptar o rechazar la tesis de Kurt von Fritz sobre la presunta crítica de Aristóteles a Platón.

En efecto, el geómetra habla de la línea que dibuja, explica Aristóteles, pero piensa en la línea que su dibujo sólo ilustra. No se trata de una cosa en sí, ciertamente, pero para el caso del geómetra es lo mismo: es una línea perfecta como tal, una línea ideal, y que sólo en el pensamiento puede ser concebida como realmente recta —aunque el dibujo nunca la presente así— y de un pie de largo (esta determinación resulta difícil de concebir en una pura idealidad, y parece ajena a la matemática; pero hay que asumirla como parte del ejemplo aristotélico, tal vez como concepción de una unidad de medida ideal).

Y si bien Aristóteles no le pide cuentas al geómetra acerca de cómo concibe la línea recta perfecta —como haría Platón—, distingue igualmente la línea dibujada de la línea pensada por el geómetra. Y califica con el nombre de *hypóthesis* la referencia del geómetra a la línea ideal. En ese sentido —y a pesar de que se trate aquí de proposiciones, no de términos— el uso del vocablo denota un enmascaramiento similar al que hallamos en Platón. Detrás del dibujo o de las palabras pronunciadas hay, advierte Aristóteles, algo oculto, de índole ideal, y que es lo que tiene en mente el geómetra.

10. COMPARACIÓN ENTRE EL APOORTE DE PLATÓN Y EL DE ARISTÓTELES A LA AXIOMÁTICA EUCLIDEA

Vamos a trazar ahora una última comparación entre los aportes platónico y aristotélico a la axiomatización matemática, y extraeremos de allí nuestra conclusión.

La comparación que proponemos es la de la relación entre el Bien y las Ideas en *Rep.* VI-VII con la del nexo entre *koiná* e *idia* en los *Segundos Analíticos*. Porque si bien Platón en ningún momento deja entrever que el Bien sea "lo universal" y las Ideas "lo particular" (como tampoco entiende a las Ideas como "universales" en relación con la multiplicidad de cosas particulares correspondientes a cada Idea; esto sólo se ve así desde la perspectiva de Aristóteles, no desde la platónica), es obvio que, así p.e. como la Idea de lo Bello es "común" a las cosas bellas sólo en el sentido de ser la *fente* de la cualidad que-esas cosas tienen de ser bellas, también la Idea del Bien —que no es una *ousía*, pero está por sobre todas las *ousíai*— es la fuente de la perfección de las Ideas, y en ese sentido, y sólo en ése, puede decirse que es "lo común" a todas ellas (siempre restringiéndonos al ámbito epistemológico y a Ideas de objetos matemáticos).

Hay una diferencia muy importante, aparte de las que más fácilmente saltan a la vista: los axiomas aristotélicos parecen fundamentar directamente la demostración matemática, en tanto que el Bien sólo indirectamente, a través de las múltiples Ideas (y dejando de lado otras distinciones, como decimos, tal como la de que Platón no articula las nociones — contenidas en las Ideas— en proposiciones de existencia o definiciones como hace Aristóteles).

¿Es tal diferencia real? Dice Kurt von.Fritz: "Aunque Aristóteles haya dicho que los axiomas son aplicados por analogía en las distintas ciencias, con ninguna palabra se indica en cuál tipo de *archai* deben contarse las proposiciones de igualdad especiales, sin lo cual la aplicación de los axiomas de igualdad falla por su base".⁵³ Aristóteles, en efecto, dice que cada uno de los principios "comunes" —de los cuales pone como ejemplo la N.C. 3— "es útil en cuanto se lo aplica en el género que corresponde a la ciencia particular" (*Seg. An.* 76 a₃₉).

53. APXA I 75-76= GGAW 400.

Esto es lo que uno esperaría que se produjera en los principios "particulares" o *idia*, pero lo que Aristóteles clasifica como tales es algo bien distinto. Los axiomas de igualdad se aplican en la geometría euclidea sólo en su forma más general, pero lo más frecuente es que su aplicación provoque dificultades por la falta de una particularización disciplinaria de dichos principios.

Naturalmente, no se trata de convertir a Aristóteles en chivo expiatorio de las fallas axiomáticas de la geometría euclidea. Si nuestra tesis sobre la indicación platónica respecto de la particularización del principio supremo en principios particulares fuera correcta, lo menos que habría que decir es que Platón no fue suficientemente claro sobre el punto como para que hiciéramos a Aristóteles la imputación de no haberlo seguido o entendido.

Lo que cabe preguntar es si no le estamos atribuyendo excesiva importancia al papel de la filosofía —trátese de Platón o de Aristóteles o de ambos, y aun añadiendo nombres de filósofos— en la axiomatización matemática. Ya hemos visto que en Grecia clásica la relación entre filósofos y matemáticos fue mucho menos rígida que lo que podemos concebir hoy en día, con la mirada puesta en el divorcio existente entre filosofía y ciencia, y entre ciencias entre sí, y entre disciplinas filosóficas entre sí. Recordemos aquí sólo que también Eudoxo, el más grande matemático anterior a Euclides, sostuvo una "teoría de las Ideas".⁵⁴ No necesitamos pensar que el cuerpo entero de la matemática griega está influido por la filosofía. Pero la axiomatización euclidea evidencia la mano de la filosofía, personificada por Platón y Aristóteles.

ABREVIATURAS DE LAS REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- K.v.Fritz, APXAI = "Die APXAI in der griechischen Mathematik", en *Archiv für Begriffsgeschichte* 1, 1955
 K.v.Fritz, GGAW= *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlin - New York, W. de Gruyter, 1971
 K.v.Fritz, PTAM= *Platon, Theaetet und die antike Mathematik*, Darmstadt, Wiss. Buchg., reimpresión con un apéndice, 1969
 ZGGM= *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, ed. O.Becker, Darmstadt, Wiss.Buchg., 1965

54. Cf. Kurt von Fritz, "Die Ideenlehre des Eudoxos von Knidos und ihr Verhältnis zur Platonischen Ideenlehre", en *Philologus* 82, 1927, p. 1-26.

A.Szabó, AGM — *Anfänge der griechischen Mathematik*, Munich - Viena,
Oldenbourg, 1969
A.Szabó, BGM— *The Beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht - Boston, D.
Reidel, 1978, trad. A.M. Ungar, supervisada por el autor
AHES *Archiv for History of Exact Sciences*

IV. EPICARMO Y LA ARITMÉTICA PITAGÓRICA*

Rara fortuna ha sido la de Pitágoras en la historia del pensamiento, a la que aparentemente no ha legado obra escrita alguna ni tampoco discípulos directos que pudiesen suministraros siquiera algunas indicaciones acerca de las ideas o doctrinas que ha podido sostener, no obstante lo cual se ha recreado su imagen, a la distancia de los siglos, como la de un maestro de vida, una figura religiosa, un líder político, un genio filosófico y un sabio científico, al que se han atribuido los hechos más maravillosos y las concepciones más originales, pioneras de la sabiduría occidental. De este modo, bien decía Eduard Zeller que "sobre el pitagorismo y su fundador la tradición es capaz de decirnos tanto más cuanto más se aleja en el tiempo de tales fenómenos, y, a la inversa, en la misma medida va acallándose cuando nos acercamos cronológicamente a su objeto mismo".¹ Porque el hecho es, por ejemplo, que uno de los testimonios más tempranos con que contamos acerca de Pitágoras y sus discípulos, el del platónico Dicearco (bien que lo conozcamos; a través de un autor tardío como Porfirio), nos asegura: "Lo que decía a sus discípulos no hay nadie que lo sepa con certeza, pues guardaban entre ellos un silencio nada común".²

Aquí queremos referirnos sólo a un par de testimonios que certificarían el origen pitagórico y la antigua data de una importante teoría matemática, la de lo par y lo impar, en la cual Platón (*Cármides* 166a, *Gorgias* 451b, *Teeteto* 198a) hace consistir el fundamento de la aritmética

* Publicado por primera vez en *Studia Humanitatis. Homenaje a Rubén Bonifaz Nuño*, México, Universidad Nacional Autónoma de México, 1987, p. 145-154.

1. E. Zeller-R.Mondolfo, *La filosofía dei Greci nel suo sviluppo storico* (trad. R.Mondolfo) 1 2, Florencia, 1938, p. 364.

2. Dicearco fr. 33 Wehrli = Diels-Kranz 14.8a = Porfirio, *Vita Pythagorae* (Nauck) 19.

ca. Se trata de unos versos del comediógrafo siciliano Epicarmo, y de una prueba de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado. Es importante hacer notar el avance metodológico que implica, dentro de la investigación del pitagorismo, el intento de basar la data antigua de posibles concepciones pitagóricas en testimonios que se supone remontan hasta fines del siglo VI o comienzos del V a.C. Significativo avance, en efecto, porque con frecuencia se pretendía reconstruir el presunto pensamiento matemático de Pitágoras y sus primeros discípulos casi exclusivamente en base a las exposiciones de Nicómaco de Gerasa y Teón de Esmirna, escritores neopitagóricos del siglo II d. C. que presentaban a Pitágoras y sus discípulos como forjadores de la matemática euclidiana, envuelta en el halo místico propio de las especulaciones del siglo II.³

Resulta curioso observar, de todos modos, como la preservación de una tradición poco crítica lleva a considerar "falsas verdades claras", como la del carácter pitagórico antiguo de la mencionada prueba de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Se trata de una demostración que, hasta el siglo pasado, figuraba dentro de las proposiciones del libro X de Euclides, con el número 118, y que los últimos editores de los *Elementos* han considerado como una interpolación, y la han relegado a la condición de un apéndice del libro X.⁴ Es una prueba por reducción al absurdo: se demuestra que, si la diagonal fuera conmensurable con el lado del cuadrado, la relación entre ambas magnitudes quedaría equiparada a la relación entre dos números, comparable a su vez, con la relación de otros dos números entre sí, uno de los cuales resultaría de tal manera a la vez par e impar. No hay en el texto griego la menor indicación de la antigüedad de la prueba ni de su presunta índole pitagórica. No obstante, es un lugar común de la moderna historiografía de la matemática griega la suposición de que se trata de una prueba antigua y pitagórica. Véase por ejemplo Árpád Szabó: "Este es el caso de la antigua proposición pitagórica sobre la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con el lado de éste (*Elem.* X ap. 27). Aristóteles es nuestro testigo de [...] que esta proposición fue verificada desde antiguo, en lo esencial, por la prueba indirecta que leemos también en Euclides."⁵

3. Cf. Nicómaco, *Introductio Arithmeticae*, p. 13, 1-5 Hoche: "las primeras dos especies que hay en él (sc. en el número epistemónico) son dos:... impar y par, que se alternan armónicamente por obra de una naturaleza maravillosa y divina".

4. *Elementa* III 408-410 Heiberg = 231-233 Stamatis.

5. *Die Anfänge der griechischen Mathematik*, Munich-Viena 1969, p. 332.

También Mondolfo toma a Aristóteles por testigo: la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal la "atribuye Aristóteles al antiguo pitagorismo".⁶ Nos resulta así sorprendente que Aristóteles (en el pasaje al cual remiten Szabó, Mondolfo y todos los helenistas que tratan esta cuestión: *Analytica Priora* I 23, 41a₂₃₋₂₇) no diga una palabra acerca de la supuesta filiación pitagórica de la prueba ni respecto de la antigüedad de la misma. De hecho Aristóteles habla en presente, de una forma sumamente general e imprecisa: "Todos los que razonan por reducción a lo imposible infieren silogísticamente lo falso, probando mediante una hipótesis la proposición original, cuando algo imposible resulta de suponer la proposición contradictoria. Por ejemplo, prueban que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado, en cuanto muestran que, si se la supone conmensurable, números pares llegarían a ser iguales a los pares." Naturalmente, de aquí no se infiere que la demostración es contemporánea de Aristóteles, pero tampoco es lícito concluir nada acerca de su posible data, a no ser la afirmación de que ya Aristóteles conocía la prueba que se ha interpolado en Euclides. En todo caso, no provee material alguno para que, con una metodología rigurosa, se decida si es de origen pitagórico o no.

El otro testimonio que se aduce en esta cuestión goza al menos del privilegio de una ubicación cronológica aproximada bastante aceptable para nosotros, y ésta sí antigua: el comediógrafo Epicarmo.⁷ Ciertamente, la autenticidad del fragmento 2 de Epicarmo—tal es el texto de que se trata—ha sido puesta en duda por Wilamowitz, quien afirma que se trata de comedias "que en realidad esconden pensamientos platónicos y que fueron compuestos bajo Dionisio II",⁸ pero este cuestionamiento no ha ganado adeptos entre los estudiosos posteriores.⁹

Dos antiguos biógrafos de Pitágoras presentan de algún modo a Epicarmo como alumno de éste. Uno de ellos, Diógenes Laercio, dice que Epicarmo "tomó clases (*ékouse*) con Pitágoras" (VIII 78 = DK 23A3).

6. R. Mondolfo, *El infinito en la antigüedad clásica*, 2ª ed. Eudeba, Buenos Aires, 1971, p. 241.

7. "Se ubica su florecimiento en la Olimpiada 73 (años 488-485)", dice W. Kranz, en *Der Kleine Pauly* 2 (Munich 1979), col. 302.

8. *Platon* II (Berlín 1919), p. 28 nota 2.

9. Cf. la refutación —para nosotros no del todo convincente— que de este punto hace Kurt von Fritz en RE (47. Halbband, 1963), col. 204-205. Ver también el rechazo que de una tesis similar a la de Wilamowitz —la de Covotti— efectúa Mondolfo, en Zeller-Mondolfo I 2, p. 319-320.

El otro, Jámblico, precisa restrictivamente esta condición: "entre los que asistían de afuera como oyentes (*tôn d'éhothen akroatôn*) también se contó Epicarmo, pero éste no [tomó parte] del círculo de los partidarios (de Pitágoras)" (*Vita Pythagorica* 266 = DK 23A4). Sobre la base de testimonios como éstos A. Rostagni catalogó como pitagórico el fr. 2 de Epicarmo, y pretendió reconstruir a partir de allí doctrinas matemáticas pitagóricas.¹⁰ Aun cuando tales testimonios gozan hoy en día de poco crédito y los intentos de Rostagni no han ganado adeptos, traduciremos a continuación el texto del fr. 2 de Epicarmo, ya que, de cualquier manera, se sigue pensando que contiene el más antiguo testimonio de la teoría pitagórica de lo par y lo impar.

"—Si a un número impar (de guijarros), o a uno par, como prefieras, alguien quiere añadir un guijarro, o bien quitar uno a los que ya están allí, ¿te parece que (aquel número) sigue siendo el mismo?" "—¡A mí no!"
 "—Y si a una medida de un codo se desea añadir o sustraer otra longitud como la que ya había, ¿subsistirá aún aquella medida?" "—Claro que no." "—Ahora mira así a los hombres: uno crece, otro se consume, todo el tiempo están en transformación. Pero lo que por naturaleza cambia y nunca permanece en el mismo estado será siempre diferente de aquello que ha sufrido el cambio. Así también tú y yo éramos ayer distintos de lo que ahora somos y de nuevo mañana seremos distintos y nunca los mismos, por la misma razón."¹¹

Oskar Becker y quienes con él consideran que este texto aporta un testimonio del antiguo pitagorismo sobre la teoría de lo par e impar citan sólo los tres primeros versos. Tomado el texto en su integridad, parece soplar en él más un aire de tragedia que de comedia, con reflexiones de marcado tono existencial. Afortunadamente para nosotros, sin embargo, Plutarco conoció la comedia en forma más completa que nosotros, y nos explica el trasfondo del texto traducido: si todo cambia y somos distintos a lo que éramos ayer, "el que recibió anteriormente el préstamo no tiene nada que pagar ahora, ya que se ha convertido en otro, y el que ayer ha sido convidado a cenar, cuando llega hoy, se encuentra con que no es

10. *Il verbo di Pitagora* (Turín, 1924), cap. II.

11. Diógenes Laercio III 11.

ya invitado, pues es otro" (*De sera numinis vindicta* 559b).¹² Con esta paráfrasis sí se hace claro que el fr. 2 de Epicarmo pertenezca a una comedia.

Dice Becker, luego de traducir los versos 1 a 3 del texto: "Esto no significa, evidentemente, sólo que del número precedente n surja otro $n + 1$ o bien $n - 1$, sino que, con ello, del número impar $n = 2m + 1$ se genere uno par $n + 1 = 2m + 2$, o bien $n - 1 = 2m$, y a la inversa, del número par $2m$ el impar $2m + 1$ o $2m - 1$; pues de otro modo no tendría sentido alguno la mención de la paridad y de la imparidad."¹³ Expresado de otro modo, lo que dice Becker es que los versos de Epicarmo no significan meramente que, al practicarse la adición o sustracción de una unidad, un número se convierta en otro (mayor o menor que el anterior en una unidad), sino que, como resultado de tal operación, un número impar se convierte en uno par, o un número par en otro impar. Y esto supone una cierta difusión, sostiene Becker, en la época en que Epicarmo compuso esta comedia, de la teoría de lo par e impar.

No conviene seguir hablando de la teoría de lo par e impar sin antes explicitar de qué trata concretamente esta teoría. Y puesto que se la hace consistir en algunas de las definiciones insertas al comienzo del libro VII de Euclides y sobre todo en un grupo de teoremas del libro IX, nos parece apropiado ponerlos a consideración del lector, para que

12. K. Reinhardt, *Parmenides und die Geschichte der griechischen Philosophie* (2ª ed. Frankfurt, 1959, p. 138) combina este texto de Plutarco con otro del *Anonymi commentarius in Platonis Theaetetus* (ed. H. Diels-W. Schubart. Berlín 1905, col. 71, líneas 26-40), y así explica que el acreedor, que había invitado a cenar al deudor, en vista de los argumentos de éste para no pagarle, lo considera ahora distinto de aquel al que había convidado, y en consecuencia lo despide a golpes, en lo cual el deudor, cuando se queja del trato recibido, es informado de que "su ofensor es, en el momento en el que él se queja, distinto del que lo golpeó". (Cf. también A. Szabó. "Eleatica", en *Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungarica* III, 1955, p. 80, quien repite casi textualmente la explicación de Reinhardt). Esto suena coherente, pero en el texto del *Anon. Comm.* no se habla de cena ni de invitación (en base aparentemente al pasaje de Plutarco, donde se halla *kaléo* por "invitar", Reinhardt da el mismo sentido al compuesto *enkaléo*, pero este verbo no significa "invitar" sino "demandar"). El *Anon. Comm.* dice que el acreedor "lo golpeó y lo demandó", pero que luego ha alegado "que uno es el que lo ha golpeado y otro el que lo ha demandado", tal vez como dos modos distintos de intentar recuperar lo prestado.

13. Oskar Becker, "Die Lehre von Geraden und Ungeraden in IX. Buch der Euklidischen Elemente" (artículo de 1946, incluido, con un "Apéndice 1963" en *Zur Geschichte der Griechischen Mathematik*, recopilación del mismo Becker, Darmstadt, 1965), p. 129.

vea por sí mismo. He aquí, en primer lugar, las definiciones del libro VII:¹⁴

- "6: 'Número par' es aquel que es divisible (en dos partes iguales.)
- 7: 'Número impar' es aquel que no es divisible (en dos partes iguales), o que difiere del número par en una unidad.
- 8: 'Número par (una cantidad) par de veces'¹⁵ es aquel que es medido (= dividido) por un número par según un número par.
- 9: 'Número impar (una cantidad) par de veces'¹⁶ es aquel que es medido por un número par según un número impar.
- 10: 'Número impar (una cantidad) impar de veces'¹⁷ es aquel que es medido por un número impar según un número impar.
- 11: 'Número primo' es aquel que sólo es medido por la unidad."

Veamos ahora las proposiciones del libro IX 18:

- "21: Si se suman¹⁹ cuantos números pares se quiera, el total será par.
- 22: Si se suman cuantos números impares se quiera, y su cantidad es par, el total será par.
- 23: Si se suman cuantos números impares se quiera, y su cantidad es impar, el total será impar.
- 24: Si de un número par se sustrae otro par, lo que resta será par.
- 25: Si de un número par se sustrae uno impar, lo que resta será impar.
- 26: Si de un número impar se sustrae otro impar, lo que resta será par.
- 27: Si de un número impar se sustrae uno par, lo que resta será impar.
- 28: Si un número impar es multiplicado por uno par,²⁰ el producto será par.
- 29: Si un número impar es multiplicado por otro impar, el producto será impar.
- 30: Si un número impar mide (= divide) a un número par, medirá también su mitad.
- 31: Si un número impar es primo respecto de algún número, también será primo respecto de su doble.

14. *Elementa* II 184-186 Heiberg = 103-104 Stamatidis.

15. *artiákis ártios arithmós*.

16. *artiákis perissòs arithmós*.

17. *perissákis perissòs arithmós*.

18. *Elementa* II 390-404 Heiberg = 214-222 Stamatidis.

19. Literalmente: "si se añaden en conjunto".

20. Literalmente: "si un número impar, al multiplicarse con uno par, hace algún número".

32: Cada uno de los números que se duplican sucesivamente a partir de la diáda sólo es par una (cantidad) par de veces.

33: Si un número tiene a su mitad impar, sólo es impar (una cantidad) par de veces.

34: Si un número no es de los que se duplican sucesivamente a partir de la diáda, ni tiene a su mitad impar, es a la vez par (una cantidad) par de veces e impar (una cantidad) par de veces."

Por cierto que estas proposiciones, por sí solas, no son, en sentido estricto, *teoremas*, sino que cada una constituye sólo la *prótasis* o enunciado de un teorema; porque, para que los teoremas sean tales, esto es, posean calidad científica, deben estar provistos de una demostración deductiva; y esto es lo que Becker pretende que existía en la aritmética pitagórica testimoniada por Epicarmo.

Ahora bien, ¿qué podría haber de todas estas definiciones y teoremas detrás de las palabras del comediógrafo siciliano? Puesto que lo que se dice en el fr. 2 es que, si a un número par o bien impar se le añade o quita una unidad, el número cambia (presumiblemente convirtiéndose en par, si era impar, o en impar, si era par), la tres primeras reglas, referidas a la adición de números pares o impares, quedan fuera de juego, ya que en Epicarmo no puede tratarse de sumar números pares (IX 21), y, por otra parte, para los antiguos griegos—incluido Euclides—el uno no podía ser considerado impar, ya que no era de ningún modo "número",²¹ lo que descarta IX 22 y 23. Y por la misma razón, no puede ser cuestión tampoco de sustraer un número impar de uno par (I 25) o de otro impar (IX 26), ni sustraer un número par de otro par o impar (IX 24 y 27). Y es obvio que los demás teoremas que hemos enumerado no guardan relación alguna con el texto de Epicarmo.²² Ninguna de las proposiciones que integran la denominada teoría de lo par e impar, por consiguiente, han debido ser conocidas o supuestas por Epicarmo para fabricar su chiste. Lo único necesario para ello parecen ser las nocións de par e impar (VII def. 6-7) .

21. Cf. O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike*, Göttingen, 1957, p. 45.

22. Nicómaco da la siguiente definición, que califica de 'pitagórica': "número par es el que admite ser dividido, por la misma división, en las partes más grandes y en las más pequeñas, las más grandes en cuanto al tamaño y las más pequeñas en cuanto a su cantidad, de acuerdo con la relación natural inversa de estos dos géneros" (*Introd. Arith.* 13, 15-19 Hoche). Obviamente no puede ser una definición muy antigua; pero tampoco lo es la que en seguida Nicómaco califica de "antigua": "par es el que puede dividirse en dos partes iguales y en dos partes desiguales" (13, 21-22).

Ahora bien, la definición que de "número par" da Euclides ("divisible en dos partes iguales") ya la hallamos en la última obra compuesta por Platón, las *Leyes* (X 895e). Sin embargo, en un diálogo juvenil, *Eutifrón*, donde pregunta "cuál parte del número es lo par", Platón no parece conocer aún aquella definición, puesto que da otra distinta y más intuitiva: "aquel número que no es escaleno, sino isósceles" (12d). Cabe alegar que un triángulo isósceles —ya que de triángulos parece tratarse en tal definición—, a diferencia de uno escaleno, es divisible en dos partes iguales; pero el caso es que, aun en la caracterización que hace Euclides de tal tipo de triángulo (I def. 20), sólo se alude al hecho de que tiene dos *lados* iguales, y sólo a esto parece remitir la etimología de *isoskelés*, "de piernas iguales". Dificilmente Platón, quien siempre muestra estar muy al día en cuanto a conocimientos matemáticos se refiere, habría propuesto, como modelo de la definición que exigía a su interlocutor, una definición tan empírica, si en su época se hubiese manejado ya otra más rigurosa y más propia de la aritmética, como la que, aproximadamente medio siglo después del *Eutifrón*, proporciona en las *Leyes*. Por consiguiente, resulta altamente improbable la suposición de que, casi cien años antes de escribirse el *Eutifrón*, hubiesen estado en boga las definiciones euclidianas de "par" e "impar".

No obstante, en VII def. 7 se incluye una segunda definición de "número impar" que ha de tener un origen distinto que las ya examinadas, y que es la que podría estar en juego en el ejemplo de Epicarmo: "aquel que difiere del número par en una unidad". Esta definición, aparentemente más antigua que la anterior, es citada por Aristóteles casi exactamente con las mismas palabras (en lugar de "que difiere del número par" dice "mayor que el par") en *Tópicos* VI 4, 142b₇₋₁₀, donde la critica porque en ella se define uno de los miembros opuestos de una división correspondiente por el otro, siendo ambos "diferencias del número". Por cierto, para que de algún modo esta definición pudiera aplicarse, requeriría que antes se hubiese definido o caracterizado de alguna manera el número par. Pero para eso, claro está, el par no podría a su vez ser definido como el que difiriera del impar en una unidad, pero tampoco como el ser divisible en dos partes iguales, ya que, de ser así, los números no-pares quedarían obviamente determinados como los no-divisibles en dos partes iguales, con lo cual la otra definición resultaría superflua.

En este punto conviene detenerse sobre el hecho de que Epicarmo habla de añadir o quitar un guijarro, *pséphos*, a un determinado número de guijarros, par o impar. Esto implica un cierto manejo de lo que se ha

dado en llamar "aritmética de guijarros", y que es atribuida generalmente a los pitagóricos, en base al testimonio de Aristóteles, confirmado por un informe de Teofrasto que se remite a Arquitas. Cuenta Aristóteles que "Eúrito determinaba qué número correspondía a cada cosa, por ejemplo un número al hombre y otro al caballo, imitando por medio de guijarros las figuras de los objetos naturales, a la manera de quienes reducen los números a figuras como el triángulo y el cuadrado" (*Met.* N5,1092b₁₀₋₁₄). Y Teofrasto: "[...] como Arquitas dijo alguna vez que hizo Eúrito, al disponer ciertos guijarros, pues afirmaba que uno es el número del hombre, otro el del caballo, otro el de lo que fuere" (*Met.* III 11, p. 12 Ross-Fobes). El nombre de Eúrito es mencionado repetidamente por Jámblico en listas de pitagóricos (*V. P.* XXIII 104, XXVIII 139, XXXVI 267; cf. Aristóxeno fr. 19 Wehrli, en *D. L.* VIII 46, etcétera), asociado con el de Filolao, de quien afirma que era discípulo (*V. P.* XXVIII 148), por lo cual, como Arquitas, ha de haber sido contemporáneo de Platón. A estos testimonios son añadidos los extensos informes de Nicómaco sobre la "notación natural" de los números—informes, a los que, como hemos visto, se los supone, con harta facilidad, enraizados en la antigua tradición pitagórica—, que implica representar distintas unidades una al lado de la otra, en lugar de echar mano, como "convenciones", a letras del alfabeto que representen a los diversos números.²³ En base a testimonios como éstos, Heath, por ejemplo, remonta la teoría de los "números figurados" (números triangulares, cuadrados, etcétera) "a Pitágoras mismo".²⁴ Becker, por su parte, reconstruye las posibles pruebas de los teoremas IX 21 a IX 34 por medio de figuras geométricas formadas por guijarros. Así por ejemplo, representando los números 4, 6, 10 y 2 por medio de otros tantos guijarros, se puede demostrar el teorema IX 21, a saber, que la suma de tales números pares es un número par.²⁵ Claro que tales demostraciones, como hace notar Walter Burkert, son necesariamente

23. Becker ("Die Lehre von Geraden", p. 130) representa la condición de "pares" de los números del ejemplo y de su suma mediante igual número de guijarros blancos y negros, de modo de destacar la caracterización del "par" como "divisible en dos partes iguales. Walter Burkert (*Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, trad. E. L. Minar, Cambridge Mass. 1972, p. 435 nota 49), por su parte, propone una disposición de los guijarros en dos hileras, de manera que el resultado sean figuras geométricas (no triángulos, por cierto) "isósceles", para el caso de los números pares, y "escalenos", para el de los impares.

24. T. Heath, *A History of Greek Mathematics I* (Oxford, 1921), p. 76.

25. Nicómaco II 6.2, p.83 ss. Hoche.

"inductivas" y "pictóricas", de modo que, a diferencia de las proposiciones IX 21-34, siempre se estaría allí lejos de una "doctrina de lo par e impar" constituida por teoremas que se hallan deductivamente encadenados: "puede ser considerado probatorio, pero no presupone otras proposiciones; todo conjunto de hechos es evidente en sí mismo; no hay necesidad de una estructura sistemática, que es la esencia de la matemática deductiva".²⁶ Pero por lo demás el testimonio de Aristóteles no garantiza de ningún modo —y menos aún el de Teofrasto— la existencia de una tal "aritmética de guijarros" en el pitagorismo antiguo. Eúrito podrá haber sido pitagórico, pero en todo caso no era un pitagórico muy antiguo, si fue realmente discípulo de Filolao, pensador cuya madurez no puede situarse antes de fines del siglo V a. C.²⁷ De todos modos, lo que Aristóteles atribuye a Eúrito es haber dibujado, por medio de guijarros, la figura del hombre y la figura del caballo, como resultado de lo cual, aparentemente, el número total de guijarros necesarios para ello se constituía para él en el símbolo o en la propiedad determinante de la esencia del hombre y de la del caballo. El uso de tal procedimiento, si nos atenemos a Aristóteles, reconoce dos antecedentes distintos: uno, el atribuido por él mismo a los "llamados pitagóricos", para los cuales un número determinado —o "una determinada propiedad de los números"— correspondía a la justicia, tal otra al alma y al intelecto, etcétera (*Met.* A5, 985b). La índole de estos ejemplos muestra bien a las claras que en tales casos no podían usarse guijarros —o que, si se los usaba, debería ser en un sentido muy distinto al de los "números figurados"— y que la relación planteada entre "cosa" y "número" era más abstracta que la que podía hallarse en Eúrito. El segundo antecedente es el ya citado de "quienes reducen los números a figuras como el triángulo y el cuadrado" (*Met.* N5, 1092b), diseñando éstos, aparentemente, con guijarros. Pero de esta aritmogeometría de guijarros Aristóteles no dice que fuera pitagórica, ni tampoco suministra más indicio de su antigüedad que el de haber sido contemporánea o acaso anterior a Eúrito, lo cual no ofrece ciertamente base alguna para atribuirla al pitagorismo antiguo.

Lo que resulta seguro es que en el tiempo de Epicarmo existía cierta "aritmética de guijarros", en la cual se ponían en juego las nocio-

26. Burkert, *op. cit.*, p. 435.

27. Una breve discusión de la cronología de Filolao hemos efectuado en el respectivo capítulo de *Los filósofos presocráticos* III (Madrid, Ctedos, 1980), p. 85-88, notas 1 y 2.

nes de "par" e "impar". Tales nociones pueden haber sido caracterizadas mediante la disposición de guijarros divididos en mitades iguales o desiguales —según los procedimientos concebidos por Becker y Burkert—²⁸ pero también es posible que hayan sido determinadas a partir de definiciones como la de la segunda parte de VII def. 7: "número impar" es "aquel que difiere del par en una unidad". Esta definición que, como ya apuntamos, parece corresponderse muy bien con el ejemplo de Epicarmo requiere una previa definición o caracterización del número par, definición que, según lo dicho, no podría ser la de su divisibilidad en dos partes iguales. Pues bien, una "aritmética de guijarros" elemental forzosamente tenía que manejarse con un reducido número de guijarros, digamos de 1 a 10 (aunque, naturalmente, podrían ser más, de 1 a 20 o de 1 a 50). Pensemos en una disposición de tal cantidad de guijarros de un modo que no fuera el de la *tetráktys*; ya que, dejando de lado la imposibilidad de precisar la antigüedad de la *tetráktys* antes del siglo III a. C., a partir de ella no podemos ir a parar a las nociones de "par" e "impar". La disposición de dichos guijarros más natural sería de dos en dos, ya que esto permitiría una clasificación dicotómica de los números; y la ordenación dualística tiene acreditada una larga antigüedad en las concepciones de los griegos, y no sólo de los griegos. Recuérdese también que el 1 no era un número para los griegos, porque "número", *arithmós*, implicaba cantidad; el primer número era, por consiguiente, el 2 (nótese que en Euclides IX 32 y 34 se habla de duplicación a partir del 2, no a partir del 1). Pero entonces nada más simple que llamar "pares" a todos los números que se generaban de dos en dos a partir del 2. Y el complemento natural de esta caracterización es la de los números impares como difiriendo de los pares en una unidad. Y no sería razonable objetar tal caracterización como demasiado empírica y poco científica, puesto que semejante objeción cabría sólo en el caso de que hubiera existido, por el tiempo de Epicarmo, una teoría matemática de índole abstracta y científica, hipótesis cuya endeblez confiamos en haber mostrado.

¿Qué relación puede tener esta "aritmética de guijarros" elemental con el pitagorismo antiguo, aun concediendo a éste el cultivo de una matemática precientífica o extracientífica? En principio, ninguno, aunque aquí cabe hacer valer la importancia que parecen haber tenido los con-

28. Cf. *supra*, nota 23.

ceptos de "par" e "impar" entre los pitagóricos, como es el caso en su inclusión en la lista de diez parejas de contrarios fundamentales, que figura en *Met.* A5, 986a. Pero dejando de lado el problema de si los pitagóricos a que Aristóteles se refiere allí son anteriores al último tercio del siglo V, Burkert ha hecho notar que "la terminología griega para 'par' e 'impar' es, en su tendencia, diametralmente opuesta a la teoría pitagórica de los números", ya que en ésta lo impar es lo más valorado, y lo que se alinea con lo Uno y el Bien, mientras que los vocablos griegos para "par" e "impar", *ártios* y *perittós* significan respectivamente "bien estructurado" y "excesivo".²⁹

Por consiguiente, no parece bien fundada la difundida tesis de que Pitágoras y sus discípulos más próximos hayan cultivado una matemática deductiva que incluyera una teoría de lo par y lo impar. En particular, resulta poco apropiado apoyar tal tesis en los versos con que Epicarmo ridiculiza acaso el pensamiento de Heráclito, acaso el de Parménides, como se ha sostenido. Por lo demás, incluso suponiendo que el pensador satirizado fuera Pitágoras o algún discípulo inmediato, ha quedado en evidencia que no se alude en esos versos a porción alguna de la aritmética científica.

Siempre es peligroso tomar parodias de una doctrina o de un pensamiento como testimonio del mismo, tal como lo muestra bien a las claras la poca confiabilidad del retrato caricaturesco que de Sócrates pinta Aristófanes en las *Nubes*. Análogamente, habrá que examinar alguna vez si la broma que gasta Jenófanes sobre la presunta doctrina de la metempsicosis de Pitágoras (21B7) puede seguir valiendo como testimonio acerca de ésta. Pero eso debe ser dejado para otra ocasión.

29. Burkert, *op. cit.* p. 437.

V. EL PITAGORISMO Y EL DESCUBRIMIENTO DE LO IRRACIONAL*

LA HIPÓTESIS DEL ESCÁNDALO

Entre las abundantes leyendas que aún circulan respecto del antiguo pitagorismo la más significativa y a la vez la más pintoresca es probablemente la que le adjudica el descubrimiento de la irracionalidad, como comprobación de la imposibilidad de hallar una medida común a la diagonal y al lado del cuadrado (o, lo que es lo mismo, a la hipotenusa y los catetos del triángulo rectángulo isósceles), con consecuencias filosóficas y sociales ciertamente muy extrañas.

Así Paul Tannery declaraba que el "descubrimiento de la inconmensurabilidad por Pitágoras debió [...] de causar, en geometría, un verdadero escándalo lógico", que sólo pudo superarse con la teoría de las proporciones de Eudoxo, ya a mediados del siglo IV a.C.¹ Por cierto que el único texto concreto en que podía apoyarse Tannery para la atribución a Pitágoras era un párrafo del llamado "catálogo de los geómetras" de Proclo, en el cual (*In pr. Eucl.* 65, 15-21 Friedlein) se dice que "Pitágoras [...] descubrió el tratamiento de los irracionales y la construcción de las figuras cósmicas". Pero el valor de esta información dependía en buena medida de la presunta autoría del peripatético Eudemo, que hace rato está muy cuestionada,² y al margen de ello, las

* Publicado por primera vez en *Méthexis* 1 (1988), Buenos Aires, p. 17-31.

1. P. Tannery, *La Géométrie Grecque*, París 1887, p. 98.

2. Hemos resumido la más reciente discusión de este tema en nuestro trabajo "Eudemo y el 'catálogo de geómetras' de Proclo" (*Emerita* 53, 1985, p. 127-157, especialmente p. 139-142; en este volumen, *supra* p. 57-60), donde arribamos a la conclusión provisional de que la fuente de este pasaje deben ser enseñanzas de un neoplatonismo pitagorizante (o de un neopitagorismo platonizante).

dificultades que dicha atribución provocaba en la reconstrucción de la historia de las matemáticas condujeron a Thomas Heath³ y a Helmut Hasse y Heinrich Scholz,⁴ entre otros, a pensar más bien en pitagóricos del siglo V que en Pitágoras mismo, aun admitiendo la posibilidad de que se hubiese desatado un escándalo. La razón de éste habría sido que la matemática pitagórica tenía como principio que "todo es número", o sea, que "el número es la esencia de todas las cosas que existen",⁵ donde "número" es sólo un número entero, por lo cual la imposibilidad de medición numérica venía a hacer estremecer los cimientos filosóficos de la doctrina. En el caso de Hasse-Scholz la superación de la encrucijada no debía esperar hasta Eudoxo sino que se producía ya en el siglo V, con Zenón de Elea y su tratamiento de lo infinitesimal.⁶ Estos autores, al igual que Heath, toman en cuenta —para fechar el descubrimiento de lo irracional a mediados del siglo V— un controvertido pasaje del *Teeteto* (147d), en donde se nos informa que Teodoro (considerado "pitagórico" por Hasse-Scholz) "demostró" "la irracionalidad de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ", etc. hasta $\sqrt{17}$ ".⁷ Pero si Teodoro comenzó por $\sqrt{3}$,

3. T. Heath, *A History of Greek Mathematics*, Oxford 1921, vol. I, p. 154-157.

4. H. Hasse-H. Scholz, *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, Charlottenburg 1928.

5. Hasse-Scholz p. 5 y Heath p. 155, respectivamente.

6. Hasse-Scholz p. 10 y ss.

7. *Ib.* p. 7, Heath p. 155. El texto platónico dice: "en lo concerniente a *dynámeis*, Teodoro nos *égraphe* esto: tanto respecto del de tres pies (de superficie) cuanto del de cinco pies, puso de manifiesto que no son conmensurables en longitud con el pie (como unidad de medida), y tomó así separadamente cada uno hasta llegar al de diecisiete pies (de superficie)". Hasse-Scholz y Heath traducen *égraphe* por "demostró". En cambio, A. Szabó (*Anfänge der griechischen Mathematik*, München-Wien-Oldenbourg 1969, p. 40 = *The Beginnings of Greek Mathematics*, tr. A. M. Ungar, Dordrecht-Boston 1978, p. 40) vierte "dibujó", y, en fórmula conciliatoria, W. R. Knorr (*The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht-Boston 1975, p. 62) escribe "probó mediante diagramas", lo cual nos parece mejor. En cuanto a *dynámeis*, Heath traduce "raíces cuadradas" (o más precisamente "*surds*"), en tanto que Knorr y M. Burnyeat ("The philosophical sense of Theaetetus' Mathematics", en *Isis* 69, 1978, p. 493 s.) "poderes", Szabó "cuadrados", y por su parte B. L. van der Waerden ("Die Arithmetik der Pythagoreer", artículo de 1947/49 reproducido en la recopilación de O. Becker *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Darmstadt 1965, p. 249, aunque en el "Apéndice 1963" para ese volumen, p. 254, se manifiesta convencido por la traducción de Szabó) y M. E. Païow ("Die mathematische Theaetetsstelle", en *Archiv for History of Exact Sciences* 27, 1982, p. 89) vierten "lados de cuadrados", que hasta el momento es la interpretación que nosotros adoptamos, ya que nos parece evidente que se está hablando de líneas. De todos modos, esto no afecta a la frase con que Heath y Hasse-Scholz parafrasean la línea al hablar de la irracionalidad de 3, 5, etc.

afirman, esto supone la demostración previa de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, que ha sido obra pitagórica; y aquí reina casi total unanimidad en el sentido de que esta antigua prueba es la que Heiberg ha conservado como apéndice 27 al libro X de los *Elementa* de Euclides.⁸

Por cierto que, ya en un artículo de 1940, Bartel L. van der Waerden rechazó la tesis de Hasse-Scholz sobre la índole filosófica de la crisis provocada por el descubrimiento en cuestión, y sobre todo lo de la presunta solución que Zenón habría aportado, pero siempre aceptando que hubo una crisis,⁹ y que la prueba mencionada es pitagórica.¹⁰ En lo que hace a la crisis, sin embargo, Kurt Reidemeister hizo notar que en ninguno de los múltiples pasajes platónicos y aristotélicos que se ocupan de lo irracional puede rastrearse el menor indicio de un escándalo;¹¹ y por lo demás se sospecha actualmente que la doctrina de que "todo el universo es armonía y número", que Aristóteles atribuye a "los llamados pitagóricos" (*Met.* I 5, 985b-986b; cf. *De Caelo* I 1, 268a) corresponde a Filolao, ya a fin del siglo V o comienzos del IV.¹² De todas maneras, y con la sola excepción de Burkert, todos los autores a que acabamos de aludir consideran que el descubrimiento de lo irracional fue cosa de los pitagóricos, y citan como prueba la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que tenemos como apéndice a Euclides X.

8. Cf. entre otros O. Becker, *Das mathematische Denken der Antike*, Göttingen 1957, p. 51.

9. B. L. van der Waerden, "Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik", en *Mathematische Annalen* 117 (1940/41), p. 115.

10. Cf. *Die Pythagoreer*, Zürich-München 1979, p. 198-199; en esta última obra, en cambio, parece haber abandonado la tesis de la crisis, y haberla sustituido (p. 69-71) por una versión crítica de la leyenda de Hipaso, a la que nos referimos más abajo.

11. K. Reidemeister, *Das exakte Denken der Griechen*, Hamburg 1949 (reprod. Darmstadt 1974), p. 30.

12. W. Burkert, *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*, Nürnberg 1962, p. 242 ss. = *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, tr. E. L. Minar jr., Cambridge Mass. 1972, p. 261 ss.; K. v. Fritz, "Philolaos", en *R. E. Supplementband XIII* (1973), col. 463, y nuestro capítulo "Filolao y los llamados pitagóricos" en *Los filósofos presocráticos III*, Madrid 1980, esp. p. 99 ss.

LA "ANTIGUA" DEMOSTRACIÓN DE LA IRRACIONALIDAD

Veamos, pues, la prueba.¹³ Dado el cuadrado ABCD, cuya diagonal es AC, se dice que CA es inconmensurable en longitud con el lado AB, y esto se demuestra por reducción al absurdo, sobre la base de que, si "CA es conmensurable con AB, la *ratio* entre CA y AB será la de un número con otro número", relación ésta comparable a su vez con la de otros dos números entre sí, EZ y H. A partir de aquí se muestra, deductivamente, que EZ es par y a la vez impar, lo cual es absurdo. Por cierto que en el texto—no comentado en escolio alguno—no hay ninguna indicación de la filiación de la prueba ni de su data. A veces esto es resuelto mediante la conexión con la doctrina de lo par y lo impar, rotulada a su turno como pitagórica en base a un testimonio del comediógrafo Epicarmo, pero en este caso con fundamentos aun más precarios.¹⁴ Con mayor frecuencia, en cambio, se aduce la palabra de Aristóteles para avalar la filiación pitagórica de la prueba y su antigua data. Así Arpad Szabó, cuando habla de "la antigua proposición pitagórica sobre la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con el lado de éste (*Elem.* X ap. 27). Aristóteles es nuestro testigo de que esta proposición fue verificada desde antiguo, en lo esencial por la prueba indirecta que leemos también en Euclides", y remite, en nota al pie de página, a "*Analytica Priora* I 23, 41a26 y I 44, 50a37".¹⁵ Del mismo modo, entre nosotros, Rodolfo Mondolfo: "También la demostración de la irracionalidad de la $\sqrt{2}$ que nos ha conservado Euclides y atribuida por Aristóteles al antiguo pitagorismo".¹⁶ Aquí falta la referencia a textos aristotélicos, pero han de ser los mismos. El segundo texto es sumamente breve; está hablando de la reducción al absurdo como silogismo hipotético, y ejemplifica: "por ejemplo, cuando se supone que la diagonal es conmensurable, los números impares son iguales a los pares" (50a37-38). Pasemos ahora al pasaje más extenso:

13. Euclides, *Elementa* III, p. 408-410 Heiberg = 231-233 Stamatis.

14. Creemos haber refutado esta tesis en nuestro artículo "Epicarmo y la aritmética pitagórica", publicado en México en 1987 e incluido en el presente volumen, *supra* p. 115-126.

15. Szabó, *Anfänge* p. 332 y nota 115 = *Beginnings* p. 247 y n. 115.

16. Mondolfo, *El infinito en la antigüedad clásica*, trad. F. González Ríos, Buenos Aires, 2a. ed. 1971, p. 241.

“todos los que razonan por reducción a lo imposible deducen silogísticamente lo falso, pero demuestran la proposición original a partir de una hipótesis, cuando algo imposible resulta al suponer la proposición contradictoria. Por ejemplo, demuestran que la diagonal es inconmensurable, en razón de que, si se la supone conmensurable, los números impares se vuelven iguales a los pares. Por lo tanto, se deduce silogísticamente que los números impares se vuelven iguales a los pares, pero que la diagonal es inconmensurable se demuestra a partir de una hipótesis, puesto que por la proposición contradictoria resulta <lo> falso” (41a23-30).

Como se echa de ver, es sumamente probable que la demostración a que alude Aristóteles sea la misma que se conserva en los *Elementa*, pero no se menciona a su autor o autores, así que es difícil saber de dónde ha sacado Mondolfo que Aristóteles la atribuye a los pitagóricos, como no sea de la *communis opinio* antes mencionada. Por lo demás, Aristóteles habla en presente, no en pasado; y aunque esto, por supuesto, no autoriza a inferir que la prueba es contemporánea de él, no hay el menor indicio que permita ponerlo como testigo, como hace Szabó, de la antigüedad de la misma. Wilbur Knorr ha advertido que el estilo de la prueba se atiene a la práctica de Euclides de distinguir cuidadosamente entre números y magnitudes, práctica cuya base se halla precisamente en el reconocimiento de magnitudes inconmensurables, por lo que no es concebible que los primeros matemáticos hayan separado —en el intento de reconocer la inconmensurabilidad— magnitudes y números.¹⁷ Cabe agregar que puede haber pocas dudas de que con dicha prueba no se descubrió la irracionalidad, sino que ella misma está suponiendo un descubrimiento anterior por otra vía; y en ese sentido, como ha sugerido Burkert, dicho descubrimiento ha de haberse producido en el ámbito de

17. *Evolution* p. 25 s. Por cierto que Knorr propone una alternativa respecto de “qué aspecto podía haber tenido una prueba pitagórica, purificada de estos rasgos anacrónicos” (p. 26 s.), en el estilo del pasaje del *Menón* 82b-85b, al cual aludimos más abajo. Sin entrar en el análisis de la propuesta de Knorr, diremos que nos parece efectivamente más simple que la otra y podría por ende ser más antigua, aunque sin duda corre con la desventaja de no estar documentada como la otra. De todos modos, Knorr no aduce ningún elemento de su presunta filiación pitagórica (en las páginas anteriores —esp. p. 22, donde hace notar que Aristóteles, quien habla de los pitagóricos a menudo, jamás los conecta con la inconmensurabilidad, de la que también a menudo habla— más bien la refuta), de modo que la frase respecto de la forma que podría tener la prueba pitagórica suena hipotética, algo así como si dijera: “si los pitagóricos hubiesen demostrado la inconmensurabilidad con una prueba como la que refiere Aristóteles, no lo habrían hecho del modo que leemos en Euclides, sino más bien de esta otra manera posible”.

la geometría y no en el de una teoría aritmética como la de lo par y lo impar.¹⁸

LA HIPÓTESIS DE HÍPASO COMO DESCUBRIDOR

En este punto un importante trabajo del gran helenista alemán Kurt von Fritz viene a atar muchos de los cabos hasta aquí sueltos, y a hacer frente a las objeciones formuladas, con un planteo por añadidura original.¹⁹ Von Fritz parte del pasaje del *Teeteto* ya citado y de la misma conclusión de que el descubrimiento de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ ha debido preceder al tratamiento de los irracionales —allí descrito— por Teodoro; y en vista de las posibles fechas de la actividad de este último, sostiene que aquello debería haber tenido lugar "a más tardar a comienzos del último cuarto del siglo V"; pero incluso, si se acepta la conexión de dicho descubrimiento con los argumentos de Zenón contra el movimiento, ha de haber sido "no después de mediados del siglo V".²⁰ "Y la tradición es unánime en la atribución del descubrimiento al filósofo pitagórico Hípaso de Metaponto" a quien ubica (en base a Jámblico y al catálogo de Proclo) "en la generación anterior a la de Teodoro".²¹ Aun cuando von Fritz no precisa las fuentes que constituirían la "tradición" que considera "unánime", es dable inferir que piensa básicamente en dos pasajes del *De Vita Pythagorica* de Jámblico (final del capítulo 88 —reproducido en *De communi mathematica scientia*— y parte de los capítulos 246 y 247), incluidos en Diels-Kranz I 108 como grupo 4 de testimonios sobre Hípaso.²² Dado que allí se habla de la

18. Burkert, *Weisheit* p. 412 = *Lore* p. 436.

19. K. v. Fritz, "The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum", publicado por vez primera en los *Annals of Mathematics* 46 (1945) p. 242-264, reproducido en D. J. Furley - R. E. Allen (edd.), *Studies in Presocratic Philosophy* vol. I (London 1970) p. 382-412; más tarde, en versión alemana ("Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont"), incluida primeramente en la recopilación de O. Becker (citada en nota 7), p. 271-307, y luego en el libro del propio von Fritz, *Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft* (Berlin - New York 1971), p. 545-571, siempre sin modificaciones. Nosotros citaremos el trabajo según la segunda publicación de la versión en inglés y la primera en alemán (cuya compaginación se reitera en la segunda, marginalmente, lo mismo que en el caso de la inglesa).

20. Von Fritz, "Discovery" p. 385 = "Entdeckung" p. 274-275.

21. "Discovery" p. 386 = "Entdeckung" p. 275.

22. Por cierto que esa sección 18.4 de D-K incluye también un texto de Clemente de Alejandría (*Stromata* V 58), que dice: "cuentan que, habiéndose acusado al pitagórico Hiparco (sic) de publicar las (doctrinas) de Pitágoras, fue abiertamente expulsado de la escuela y se le erigió un monumento fúnebre, como si hubiera muerto".

construcción de la "esfera de doce pentágonos" —que se interpreta como una referencia al dodecaedro regular—, von Fritz conjetura que es en esta figura donde se ha producido el descubrimiento, o, más concretamente, en cualquiera de los pentágonos regulares que son sus caras: "había un antiguo método, conocido por los artesanos como regla empírica muchos siglos antes del comienzo de la filosofía y de la ciencia en Grecia, a saber, el método de sustracción recíproca, por el cual se halla la mayor medida común". Por cierto que, en la forma como lo practicaban los artesanos, no era posible descubrir la inconmensurabilidad, pero sí trazando todas las diagonales dentro del pentágono, con lo que se forma un nuevo y más pequeño pentágono regular en el centro, con el cual cabe practicar la misma operación, y así hasta el infinito (cosa que, señala von Fritz, podrían haber hecho los pitagóricos —que "estaban interesados en diagonales"— inclusive por medio del pentagrama o estrella de cinco puntas que usaban como contraseña),²³ por lo cual "es patente casi a primera vista" que "la relación entre la diagonal y el lado no puede ser expresada en números enteros, por grandes que sean".²⁴

Que el primer caso de irracionalidad haya sido advertido no en la diagonal del cuadrado sino en la del pentágono, dice van der Waerden, "es muy bien posible, pero no seguro".²⁵ De todos modos, nosotros tenemos que señalar que, en todos los casos en que Aristóteles se refiere a la perplejidad que suscita la inconmensurabilidad de la diagonal respecto del lado, no tenemos duda alguna de que está hablando del cua-

23. "Discovery" p. 402-403 = "Entdeckung" p. 295-296, donde von Fritz ilustra con un gráfico el procedimiento que sugiere. En la misma recopilación de Becker citada en nota 7 se incluye una ponencia de 1958 de Siegfried Heller ("Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer", p. 319-354), en la cual desarrolla el mismo procedimiento. Para el testimonio del pentagrama como contraseña, von Fritz remite al retórico del siglo II d.C. Luciano (*De lapsu in salutando* 5) y a un escoliasta de las *Nubes* de Aristófanes.

24. En el curso de esta "sustracción recíproca", dice von Fritz, podemos ver que "la diferencia entre la diagonal y el lado del pentágono más grande es igual a la diagonal del pentágono más pequeño, y la diferencia entre el lado del pentágono más grande y la diagonal del pentágono más pequeño es igual al lado del pentágono más pequeño, y a su vez la diferencia entre la diagonal del pentágono más pequeño y su lado es igual a la diagonal del siguiente pentágono más pequeño, y así sucesivamente hasta el infinito" (*loc. cit.*). Sin duda von Fritz tiene aquí presente la proposición X 2 de Euclides: "si cuando, de dos magnitudes desiguales, se sustrae continuamente (*aei*) la menor de la mayor, la restante nunca mide a la precedente, las magnitudes serán inconmensurables" (en X 3, en cambio, se muestra el caso de las magnitudes conmensurables, donde la última restante mide exactamente a la anterior, y se denomina "máxima medida común": al no suceder esto en X 2, el proceso es infinito).

25. *Die Pythagoreer* p. 399.

drado o de un paralelogramo en general.²⁶ Por su parte, Knorr hace notar que la propuesta de von Fritz es la de que el descubrimiento de la inconmensurabilidad tuvo lugar al advertirse que la "sustracción recíproca" o *anthyphairesis* "de dos líneas en razón media y extrema continuaba necesariamente hasta el infinito".²⁷ Y en ese sentido, afirma Knorr, hay que decir que no se conoce en la literatura griega uso alguno de *anthyphairesis* para demostrar la inconmensurabilidad de líneas en razón media y extrema, y aparentemente los editores y escoliastas de los *Elementos* no encontraron en sus fuentes ejemplos de tal procedimiento.²⁸

Ahora bien, más allá de la posibilidad de que Hipaso haya operado sobre la diagonal de un cuadrado o de un pentágono, y con un procedimiento de "sustracción recíproca" o cualquier otro, debemos considerar la historicidad del hecho mismo del descubrimiento de la irracionalidad por Hipaso, respecto de la cual vimos que von Fritz asevera que "la tradición es unánime". Por el contrario, en efecto, se ha alegado que "la tradición es inexistente".²⁹ Pero dejemos que hablen los textos por sí mismos; para su mejor análisis los dividiremos en párrafos, señalizándolos con letras. El primero dice así:

"(a) Acerca de Hipaso se cuenta que era de los pitagóricos, pero que, por haber publicado y construido por vez primera la esfera de los doce pentágonos, (b) a causa del sacrilegio cometido pereció en el mar, (c) y recogió la fama de ser el descubridor, aunque todo era (<obra> de 'aquel varón': así, en efecto, llamaban a Pitágoras, y no por su nombre" (*V.P.* cap. 88, p. 52, 2-8 Deubner = *Comm. Math. Sc.* p. 77, 18-24 Festa-Klein).

26. Cf. la lista —completa, según el autor— de pasajes aristotélicos concernientes a la inconmensurabilidad, recopilados por Silvio Maracchia, al final de su trabajo "Aristotele e l'incommensurabilità" (en *Archiv for History of Exact Sciences* 21, 1979, p. 201-228), donde (p. 221-226) registra veintinueve pasajes. Por cierto que en ninguno de ellos aparecen las palabras "cuadrado" o "paralelogramo", pero no cabe la menor duda al respecto: desde Platón hasta por lo menos Euclides, *diámetros* significa o bien "diagonal" del cuadrado o de cualquier paralelogramo (o del cubo, en Euclides), o bien "diámetro" del círculo (o de la esfera, en Euclides). Ni siquiera cuando Euclides construye el pentágono (IV 11 y XIII 11) y el dodecaedro (XIII 17) emplea el término *diámetros* para referirse a líneas del pentágono.

27. Knorr, *Evolution* p. 29. Cf. Euclides VI def 3: "se dice que una recta está dividida en razón extrema y media cuando el segmento mayor es respecto del menor tal como el todo de la recta respecto del mayor" (o sea, lo que desde el Renacimiento se ha llamado "sección áurea" y que ya los griegos denominaban "sección" *tomé*: ésa es la relación que von Fritz plantea entre la diagonal y el lado del pentágono (ver nota 24).

28. *Op.cit.* p.31.

29. A. Wasserstein, "Theaetetus and the history of the theory of numbers", en *Classical Quarterly* 59 (1958), p. 165 n. 3. Burkert, *Weisheit* p. 433 = *Lore* p. 457, B. L. van der Waerden, "Pythagoreische Wissenschaft", en *R.E.* 47 (1963) col. 286, cf. *Die Pythagoreer* p. 71-72.

Como se echa de ver, lo que aquí se atribuye a Hípaso es la construcción del dodecaedro, y no se habla para nada de irracionalidad. Leamos ahora el segundo texto:

"(d) Dicen que el primero que reveló la naturaleza de la conmensurabilidad y de la inconmensurabilidad a quienes no eran dignos de participar en tales doctrinas fue abominado a punto tal, que no sólo lo excluyeron del aprendizaje en común y de la convivencia, (e) sino que también le construyeron una tumba, como si aquel que alguna vez había sido su compañero hubiese abandonado efectivamente la vida humana. (f) Otros afirman que la divinidad se disgustó con los que divulgaron las doctrinas de Pitágoras. (g) Como consecuencia del sacrilegio cometido, en efecto, pereció en el mar aquel que reveló el dodecaedro, esto es, cómo se inscribía en una esfera la construcción del icosaedro, una de las cinco figuras dichas sólidas. (h) Pero algunos han dicho que esto sucedió al que difundió lo relativo a la irracionalidad y a la inconmensurabilidad" (V.P. cap. 246-247, p. 132, 11-23).

En este segundo texto no se menciona en absoluto el nombre de Hípaso; de todas maneras, la similitud de los párrafos (a) y (b) con el (g) permite conjeturar que también en este último el aludido puede ser Hípaso, pero siempre en relación con el dodecaedro: en este complejo texto queda, en efecto, claramente discernido el caso de quien descubrió o difundió la inconmensurabilidad, (d) y (h), del que difundió la construcción del dodecaedro, (f) y (g). De este modo, si bien la relación que vimos establece von Fritz entre el dodecaedro y la inconmensurabilidad no es imposible,³⁰ no hay ningún testimonio antiguo que atribuya a Hípaso el descubrimiento de la irracionalidad. La figura de Hípaso (ignorada por

30. Por cierto que la construcción matemática del dodecaedro no se puede practicar sin conocer previamente la del octaedro, efectuada por Teeteto en el segundo cuarto del siglo IV, cosa que von Fritz no ignora (cf. "Theaitetos", en *R.E.* V A 1934, col. 1364), pero arguye ("Discovery" p. 401 = "Entdeckung" p. 295) que el verbo *grápsasthai*, que en nuestro párrafo (a) traducimos "construyó", puede significar también meramente "dibujó", y que es probable que ésa haya sido la tradición original. Y para dibujar un dodecaedro regular no necesitaba Hípaso conocer el octaedro; le ha bastado observar bien alguno de los cristales de pirita con forma natural de dodecaedro regular que F. Lindemann halló en Padua, y que pueden datar de los años 900 a 500 a.C. Este argumento (en el que Kurt von Fritz puso especial énfasis en una conversación personal que sostuvimos en marzo de 1977 en su casa de Munich, cuyo cálido recuerdo me acompaña al escribir estas líneas, por lo que deseo que la crítica que aquí hago valga de homenaje al gran maestro), que ya fuera esgrimido con menor solidez por Eva Sachs (*Die fünf platonischen Körper*, Berlín 1917, p. 84 ss.), constituye sin duda una hipótesis posible, pero nada más que eso, ya que implica conjeturar demasiadas cosas acerca de alguien de quien sabemos tan poco y en forma tan confusa como de Hípaso.

Aristóteles y Teofrasto, como no fuera para alinearlos extrañamente con Heráclito en la postulación del fuego como *arché* de todas las cosas; cf. D-K 18.7-9 y 22 A 5) parecería haberse convertido, dentro de la literatura de anecdotarios y biografías de fines de la antigüedad, en el chivo emisario de cuanta acusación ha circulado de herejía o deslealtad hacia el pitagorismo, ya fuera como "acusmático" (*Comm Math. Sc.* p. 76, 19-24), o, al revés, como "matemático" (*V.P.* cap. 81, p. 46, 25-47, 4), o bien en cualquier otro carácter (D.L VIII 7, *V.P.* cap. 257).

DEL LUCRO CON EL SABER

Vale la pena comparar con los textos precedentes, de todas maneras un pasaje de Diógenes Laercio (VIII 42), en que menciona el nombre de Hipaso como destinatario de una carta de Lisis de Tarento, "pitagórico que huyó a Tebas y que fue maestro de Epaminondas" (D.L. VIII 7; hay que situarlo, por tanto, a fines del siglo V o comienzos del IV), aunque sabemos que la carta es apócrifa, y escrita unos dos siglos después.³¹ Pues bien, un texto similar se halla preservado en los *Epistolographi Graeci* de R. Hercher y también parcialmente en Jámblico (*V.P.* cap. 75, esp. p. 43, 1), pero en estos dos casos figura el nombre de Hiparco, en lugar de Hipaso, lo cual ha sido a veces tomado como un error de Jámblico,³² pero naturalmente también podría tratarse de un error de Diógenes o de su fuente.³³ Veamos unas pocas frases de la carta:

"(i) También dicen muchos que has filosofado en público, lo cual era tenido como indigno por Pitágoras, quien, al confiar sus memorias a su hija Damo, le prescribió que no las diera a conocer fuera de la casa. (j) Y aun pudiendo vender los discursos por mucho dinero, no quiso, sino que tuvo a la pobreza y lo prescripto por su padre por más valiosos que el oro... (k) Si cambias en esto, me regocijaré; pero si no, habrás muerto para mí".³⁴

31. W. Burkert, "Hellenistische Pseudopythagorica" en *Philologus* 105 (1961), p. 16 ss.; H. Thesleff, *Introduction to the Pythagorean Writings of the Hellenistic Period*, Abo 1961 p. 15 y 115 (cf. "Doric pseudopythagorica" en *Pseudepigrapha* 1, *Entretiens* XVIII F. Hardt Vandoeuvres-Genève 1972, p. 68).

32. Knorr, *Evolution* p. 61 n. 96.

33. Véase *supra* nota 22; cf. Burkert, *Weisheit* p. 435 n. 86 = *Lore* p. 459 n. 63.

34. Tomo el texto de H. Thesleff (*The Pythagorean Texts of the Hellenistic Period*, Abo 1965, p. 114, 4-12), quien reproduce el de Hercher (*Epistol. Gr.* p. 603). En Diógenes no está el párrafo (k), mientras en Jámblico falta todo lo referente a Damo, y (k) concluye: "habrás muerto" sin el "para mí".

Si hacemos un paralelo de estas palabras con los pasajes que antes citamos de Jámblico, podremos hallar similitudes entre los párrafos (a), (d), (h) e (i), por un lado, en cuanto en todos ellos se trata de una divulgación prohibida (aunque ahora no se especifique el contenido en cuestión). y, por otro, entre (e) y (k), en los que la represalia consiste en darlo por muerto en vida, y a su vez correlativos de (b) y (g), donde el castigo era una muerte efectiva en un naufragio. Pero a esto se añade ahora un elemento nuevo, en (i), a saber, la posibilidad de lucro con la doctrina pitagórica. No se informa abiertamente que Hípaso-Hiparco haya obtenido dinero por su "filosofar en público", pero queda sugerido que sí. Comparemos esto con dos párrafos que vienen inmediatamente a continuación del (c) en Jámblico:

"(l) Las disciplinas matemáticas progresaron después de que publicaron (sus obras) los dos que más las impulsaron, Teodoro de Cirene e Hipócrates de Quios. (m) Los pitagóricos dicen que la geometría se divulgó de este modo: uno de los pitagóricos perdió su fortuna, y, a raíz de este suceso, se le permitió lucrar con la geometría". (*Comm. Math. Sc.* p. 77, 24-78, 4).

Como ese libro de Jámblico es un verdadero *collage* de pasajes de diversas fuentes, no resulta claro si (m) está conectado con (l), y si por ende el pitagórico de quien se dice que lucró divulgando la geometría es uno de los dos matemáticos mencionados. Teodoro figura en el "catálogo de pitagóricos" de Jámblico (*V.P.* cap. 267, p. 146, 8), lo cual, por cierto, no garantiza en nada su filiación pitagórica; Hipócrates en cambio no figura; aunque precisamente respecto de éste se conectan geometría y lucro en una anécdota que cuenta Filópono, en el sentido de que era un mercader cuya nave fue asaltada cerca de Atenas, por lo que se quedó allí para enjuiciar a sus asaltantes, y, para distraerse durante el largo proceso, se dedicó a la geometría, tratando de cuadrar el círculo (*In Phys.* p. 31, 3 Vitelli).

En todo caso, tanto Teodoro como Hipócrates pertenecen al último tercio del siglo V, lo cual, como en el caso de Hípaso-Hiparco, acerca más en el tiempo el episodio de la divulgación de escritos matemáticos. Y esta cronología, en lo que hace a escritos pitagóricos en general, es reforzada por otro pasaje de Jámblico, donde leemos:

"(n) En el curso de tantas generaciones anteriores a la de Filolao, no apareció ninguna de las memorias pitagóricas, sino que éste fue el primero que publicó los tres libros de los que tanto se ha hablado, (ñ) y de los que se cuenta

que Dion de Siracusa, por encargo de Platón, compró en cien minas a Filolao, quien se hallaba sumido en una gran y apremiante pobreza" (V.P. p. 109, 81 6).³⁵

Dejando de lado si la compra fue directa y era o no el primer ejemplar en venta, llegamos de todas maneras a fin del siglo V o comienzos del IV.

DE NAUFRAGIOS Y SECRETOS

Volvamos ahora a las versiones más terroríficas de Jámblico, que hablaban de la muerte en el mar como castigo. Por algunos textos como un discurso apologético de Andócides, resulta patente que a fines del siglo V se establecía una suerte de interdependencia recíproca entre sacrilegios y naufragios: si había un naufragio, era castigo de los dioses por la falta cometida, y si se pensaba en una falta cometida por alguien que emprendía un viaje, el castigo divino lógico era un naufragio.³⁶ Hay al respecto un interesante escolio al libro X de Euclides, que dice:

"(o) (Cuenta) un relato de los pitagóricos que el primero que dio a publicidad el estudio de éstos (sc. de los irracionales) sucumbió en un naufragio; (p) y (con ello) tal vez se quería dar a entender (*einittonto*) que todo lo irracional que hay en el universo —no sólo irracional sino también amorfo— gusta ocultarse, y que, si algún alma se arrojara a semejante clase de vida y la hiciera accesible y manifiesta, sería arrojada al mar de la generación y sumergida en las inestables corrientes de ésta. (r) Tal veneración tenían estos varones por el estudio de los irracionales".³⁷

35. Sobre otros textos referentes a esta presunta compra de Platón —y también en relación con el Pseudo-Timeo Locro— cf. nuestro capítulo sobre Filolao (mencionado en nota 12), esp. p. 87 y 91-94.

36. Andócides, *De Mysteriis* 137.

37. Euclides V 2, *Scholia in libros VI-XIII* p. 417 Heiberg = 85, 22-86, 4 Stamatis. (Las palabras "gusta ocultarse", *kryptesthai philei*, son una evidente cita del fr. 123 de Heráclito.) Sin duda se trata de la misma versión que leemos en el comentario de Papo al mismo libro X, que conservamos en su traducción al árabe (G. Junge - W. Thomson, *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*, Arabic Text and translation by W. Thomson Cambridge Mass. 1930). El pasaje dice, en la versión inglesa: "The sect (or school) of Pythagoras was so affected by its reverence for these things that a saying became current in it, namely, that he who first disclosed the knowledge of surds or irrationals and spread it abroad among the common herd, perished by drowning: which is most probably a parable by which they sought to express their conviction that firstly, it is better to conceal (or veil) every surd, or irrational, or inconceivable in the universe, and, secondly, that the soul

Como puede verse, en (p) se pasa a interpretar la versión del naufragio como un mito. Pues bien, el mismo verbo *ainíttomai* ("dar a entender", "significar"), lo hallamos en otro naufragio aludido por Eurípides, según el historiador Filócoro:

"(s) Dice Filócoro que, cuando Protágoras navegaba hacia Sicilia, la nave naufragó, y que esto lo da a entender (*ainíttesthai*) Eurípides en su (tragedia) *Ixión*".³⁸

Complementaria de ésta es la versión de Sexto Empírico:

"(t) Protágoras escribió explícitamente: 'con respecto a los dioses, no soy capaz de decir si existen ni de qué modo son, pues muchas son las cosas que me lo impiden'. (u) Por esta causa los atenienses lo condenaron a muerte, y, habiendo escapado, pereció al naufragar en el mar".³⁹

Si tenemos en cuenta que Filócoro vivió hacia fines del siglo IV a.C. (tal como las fuentes más antiguas de Jámblico), y Eurípides hasta fin del V, podremos observar que la versión más temprana de un naufragio simbólico corresponde a Protágoras, y no a un pitagórico. Pero regresemos al pitagorismo a través de la leyenda del secreto divulgado, en su versión más antigua, la de Plutarco (fin del siglo I d.C., comienzos del II), quien cuenta que el rey Numa hizo aprender a los sacerdotes el contenido de sus libros religiosos, y luego les ordenó que, cuando muriera, los sepultaran con su cadáver, por pensar que no convenía dejar por escrito "cosas secretas" (*apórrheta*). Y añade:

"(v) Con el mismo razonamiento —se dice— tampoco los pitagóricos pusieron por escrito sus doctrinas, sino que inculcaban en los discípulos dignos el

which by error or heedlessness discovers or reveals anything of this nature which is in it or in this world, wanders <thereafter> hither and thither on the sea of non-identity . . . where there is no standard of measurement" (p. 64; subrayado mío).

38. D. L. IX 55 = Filócoro fr. 217 Jacoby = Eurípides fr. 490 Nauck = D-K 80 A 1, 55.

39. S.E., *Adversus Mathematicos* IX 56 = D-K 80 A 12, cf B 4. Como en el proceso aludido el acusador parece haber sido Pitodoro, uno de los cuatrocientos tiranos (D.L IX 54), F. Jacoby (*Fragmente der griechischen Historiker III b Supplement*, vol. I p. 584) fecha el evento entre el 412 y el 411. R. S. Bluck (*Plato's Meno*, Cambridge 1964, p. 359) y W. K. C. Guthrie (*A History of Greek Philosophy III*, Cambridge 1969 p. 262) sitúan, en cambio, algo antes la muerte de Protágoras, en el 420; de todos modos, siempre en el último tercio del siglo V.

aprendizaje y recuerdo oral de aquéllas. (w) Y habiéndose divulgado a alguien indigno el tratamiento de procedimientos considerados difíciles y secretos (*árrheta*), afirmaron que la divinidad les había hecho señal (*episemainein*) de que castigaría con una gran desgracia común esta infracción y sacrilegio" (*Numa* XXII 2).

Como ha hecho notar Burkert, la palabra *árrheta* significa —tal como antes *apórrheta*— no sólo "secreto" o "indecible", en el sentido de "inefable" y a la vez "prohibido", sino también "irracional". porque se consideraba irracional a lo que era indecible en números enteros: y lo que en geometría era *árrheton* tenía un aire misterioso para el lego, desde allí había un solo paso hasta unir los dos sentidos de la palabra al seguirse transmitiendo la leyenda.⁴⁰

De esta suerte queda completamente desinflada la versión de que los pitagóricos descubrieron lo irracional: los únicos motivos constantes en la tradición antigua son: 1) los que conciernen al carácter secreto de todas o algunas de sus doctrinas, 2) el hecho de su divulgación en algún momento, no anterior al último tercio del siglo V a.C., y 3) sin que esto sea ya unánime, la consideración de que tal difusión fue sacrílega y conllevó algún castigo.

HIPÓTESIS DE UN SOFISTA COMO DESCUBRIDOR

Ahora bien, si no fue un pitagórico, ¿quién descubrió la inconmensurabilidad? Al recopilar anécdotas de naufragios, hemos visto que las más antiguas —al menos en cuanto podemos fecharlas con certeza— conciernen a Protágoras, sofista a quien Aristóteles presenta ocupándose de refutar a los geómetras (*Met.* III 2, 998a1-4). Por cierto que a partir de ese solo dato no pretendemos inferir nada aproximadamente cierto, pero nos sugiere una pista: el problema de la inconmensurabilidad de la diagonal respecto del lado parece un proble-

40. Burkert, *Weisheit* p. 436-437 = *Lore* p. 461-462; cf. también L. Brisson, "Usages et fonctions du secret dans le pythagorisme ancien" (en *Le secret*, éd. Ph. Dujardin, Lyon 1987), p. 97. Ambos remiten además a Jámblico, *V.P.* cap. 252 (= Porfirio, *V.P.* cap. 57), cuya fuente es Nicómaco de Gerasa; Burkert cita también una interpolación en el texto de Elías, *In Ar. Categ.* p. 125, 12-13 Busse, donde se habla de las "líneas irracionales" (en ese caso, un descubrimiento de Teeteto, cf. nota siguiente) como un secreto traicionado. Para "irracional" Platón emplea *árrheton* en *Rep.* VIII 546c (Euclides prefiere *álogon*, pero para "racional" usa *rhetón*).

ma propio de sofistas, análogamente al de la cuadratura del círculo, del cual, además de Hipócrates de Quíos—a quien hemos visto como comerciante o con alguna otra conexión aparente, entre (l) y (m), con el lucro en el saber (algo que Platón tomó como rasgo peculiar de los sofistas)—, sabemos por Aristóteles que se ocuparon sofistas como Antifonte y Brisón.⁴¹ Y en el fondo se trata de problemas de la misma orientación, ya que en ambos casos se trata de medir algo que parece difícil o imposible de medir. También al sofista Hipias de Elis una tradición—poco confiable, ciertamente—le atribuye un intento de cuadratura,⁴² y en el *Hipias Mayor* (303b7-c1) se lo muestra en una conversación en la que se toca el tema de las magnitudes irracionales.⁴³

Retomemos ahora al pasaje del *Teeteto* 147d y a la pregunta de por qué Teodoro comenzó con la *dynamis* de 3, y leamos la explicación que daba un comentarista del siglo I o II d.C.:

"También el cuadrado de dos pies es incommensurable respecto del de un pie en cuanto al lado, pero lo omitió, dicen, por haber mostrado en el *Menón* que el cuadrado (construido) a partir de la diagonal es el doble del cuadrado (construido) a partir del lado".⁴⁴

41. *Fis.* I 2, 185a y *Ref. Sof.* XI 171b-172a, y los comentarios de Temistio y Simplicio, en el primer caso, y el de Alejandro, en el segundo.

42. Proclo, *In pr. Eucl.* p. 356,10-12; cf. Heath, *A History* I p. 226-230.

43 Por cierto que aparte de que las palabras en cuestión ("cuando cada una de dos cosas es irracional, pero en conjunto son o bien racionales o bien irracionales") son puestas en boca de Sócrates, ni Hipias ni Sócrates ni el joven Platón podrían haber manejado tal noción de irracionalidad. Dorothy Tarrant (*The Hippias Major attributed to Plato*, 1928, reprod. New York 1976, p. 83-84) cree que se trata de una equivocación, "porque dos *árrheta* no pueden convertirse en *rhetá* mediante su suma [...] Hipias es matemático, pero deja pasar inadvertido este error de Sócrates". Pero en realidad no hay error alguno, ya que, como muestra Heath (*op. cit.* I p. 304) en Euclides XIII 6 se establece que, en una recta racional dividida en *ratio* media y extrema, cada uno de los segmentos así formados es una recta irracional llamada "apotome", lo cual demuestra que la suma de dos irracionales puede dar una racional. Claro que esto implica el tratamiento de las líneas irracionales (medial, binomial y apotome) del libro X de Euclides, que sabemos por Eudemo (*apud Comm. of Pappus*, p. 63, citado en nota 37) que se debe a Teeteto, lo cual supone una fecha bastante posterior a la que correspondería al *Hipias Mayor* (cuyo máximo *terminus ante quem* ha de ser el 388). De modo que allí Tarrant habría podido tener otro argumento para declarar apócrifo el diálogo, o al menos este pasaje.

44. *Anonymi Commentarius in Platonis Theaetetum* p. 20, col. 28, 37-29, 1 Diels-Schubart.

Como se sabe, en el *Menón* 82b-85b Sócrates propone a un esclavo que construya un cuadrado que duplique a otro de dos pies de lado y cuatro de superficie, o sea, que construya un cuadrado de ocho pies. y la pregunta por cuánto debe medir su lado no es respondida bien hasta que se abandona el terreno aritmético y se entra en el puramente geométrico: "si no quieres hacer cuentas, muéstrame a partir de cuál <línea se construye el área de ocho pies>" (84a1). Y en seguida se ve que esa línea que hará de lado del nuevo cuadrado es la que, de ángulo a ángulo, atraviesa el cuadrado inicial: "y esa línea es precisamente la que los sofistas llaman 'diagonal' " (b34). Desde Schleiermacher hasta la fecha se ha acostumbrado a traducir aquí *sophistai* por "sabios", "profesores" o "intelectuales". Pero el diálogo tiene permanentemente en vista a aquellos a los que Platón caracteriza (en 91b2-8) como individuos que se ofrecen "como maestros de virtud ... mediante un salario que han estipulado ... y sin duda sabes que son los que los hombres llaman 'sofistas'". Ante semejante definición, se haría bien extraño que, de las ocho veces que emplea Platón en el *Menón* el vocablo *sophistai* (siempre en plural; además de las instancias ya vistas, 92b5. d2, e5, 95b9, c5 y 96b6), la del pasaje geométrico fuera el único caso en que se lo usara en esa otra acepción. No; está bien claro que habla de lo que él llama "sofistas". Y puesto que éstos son los que han bautizado "diagonal" a esa línea inconmensurable con el lado, con lo cual queda testimoniado que más bien ellos que los pitagóricos se han interesado en diagonales, nada más lógico que hayan sido ellos los que descubrieron dicha inconmensurabilidad (aunque esto por el momento no pueda pasar de ser otra hipótesis de trabajo). Pero no por eso han provocado escándalos ni sufrido procesos; sin duda alguna, en cambio, han contribuido grandemente al avance de las matemáticas y suscitado la admiración que describe Aristóteles y que ya experimentara Platón. Sólo que ni Platón ni Aristóteles iban a ser quienes les agradecieran tan importante servicio (aunque Platón, como vimos, no ha podido evitar dejarnos un indicio).

ÍNDICE DE AUTORES MODERNOS

Los números romanos remiten a los capítulos de este volumen, y los números arábigos a las notas respectivas.

ALLEN, R.E.- FURLEY, D.J.	130; véase FURLEY-ALLEN
BARNES, J.	128
BECKER, O.	126, 32; IV 13, 21, 23, 28; V. 8, 19
BEIERWALTES, W.	II 33
BERNAYS, P.	III 10
BLUCK, R.S.	I 31; V 39
BRISSON, L.	V 40
BURKERT, W.	I 10, 26; II 36, 39, 40, 41, 50, 51, 54, 62; IV 23, 25, 28, 29; V 12, 18, 29, 31, 33, 40
BURNYEAT, M.	I 32; V 7
CALVERT, B.	III 43
CAMPBELL, L.	I 32
CORNFORD, F.M.	I 27, 32; II 27
CHERNEISS, H.F.	II 13, 14, 27; III 37, 52
DARENBERG, C. - SAGLIO, E.	I 23
DIELS, H.	II 7, 15, 53
DIES, A.	I 32
DILLER, H.	III 42
DUJARDIN, P.	V 40
DUERING, I.	II 10
EECKE, P. ver	II 26

EGGERS LAN, C.	16, 11, 14, 21, 37; II 52; III 18, 42; IV 27; V 2, 12, 14, 35
FRIEDLEIN, G.	II 22, 28
FRITZ, K. von	I 1, 2, 15, 16, 17, 22, 24; II 61, 67; III 1, 5, 8, 9, 10, 19, 20, 21, 22, 26, 27, 28, 37, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 53, 54; IV 9; V 12, 19, 20, 21, 23, 30.
FURLEY, D. J. - ALLEN, R. E.	II 67; V 19
GADAMER, H.-G.	I 3, 18; II 5
GIGON, O.	128
GLADIGOW, B.	123
GUTHRIE, W. K. C.	V 39
HARTAMANN, N.	14
HASSE, H.-SCHOLZ, H.	I 30; V 4, 5, 6, 7
HEATH, T. L.	I 5, 25, 32, 36; II 1, 2, 27, 56, 58, 59, 60, 63, 65, 68, 71, 72; III 1, 17, 19, 24, 26, 41; IV 24; V 3, 5, 7, 42, 43
HEIBERG, I. L.	II 60
HELLER, S.	V 23
HERCHER, R.	V 34
HIRZEL, R.	III 37
JACOBY, F.	V 38, 39
JAEGER, W.	II 7; III 3
JUNGE, G.-THOMSON, W.	II 57; V 37
KAHN, C. H.	1 9
KALINOWSKI, G.	1 29
KAPP, E.	III 2, 4, 35
KENNEDY, G.	I 28
KNORR, WW.	I 32; V 7, 17, 27, 28, 32

NEUENSCHWANDER, E.	III, 16
NEUGEBAUER, O.	I 8, 12, 13
OWEN, G. E. L.	I 30
PAIOW, M. E.	I 32; V 7
PERELMAN, Ch.	I 29
REIDEMEISTER, K.	V 11
REINHARDT	IV 12
ROSTAGNI, A.	IV 10
SACHS, E.	II 70; V 30
SEIDENBERG, A.	III 23
SOLMSEN, F.	III 46
STENZEL, J.	III 34, 36
SZABÓ, A.	I 26, 32, 33, 34; II 27; III 1, 6, 7, 10, 29, 30, 31, 32, 33, 38, 39, 50; IV 12; V 7, 15
TANNERY, P.	I 32; II 18, 32, 41, 47, 72; V 1
TARRANT, D.	III 43; V 43
THESLEFF, H.	V 31, 34
VOGEL, C. J. de	II 24, 37
WAERDEN, B. L. van der	I 18, 19, 30; II 5, 34, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 58, 66, 72; III 40; V 7, 9, 10, 25, 29
WASSERSTEIN, A.	V 29
WEDIN, M. W.	IV 13
WEHRLI, F.	I 20; II 3, 4, 6, 8, 9, 16, 20, 30
WILAMOWITZ, U. von	IV 8
ZELLER, E. - MONDOLFO, R.	IV 1, 9
ZEUTHEN, H. G.	III 25