Introduction

la mécanique du solide a pour objet **l'étude des lois du mouvement ou d'équilibre des systèmes mécaniques** constituant les produits industriels. La cinématique est la discipline qui permet l'étude de ces lois du mouvement.

1. Rappels de physique utiles pour la suite

2. Vecteur vitesse et accélération d'un point d'un solide

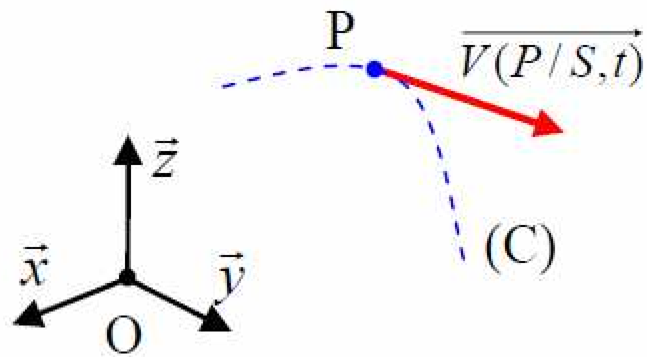
3. Vecteur vitesse instantané de rotation

4. La dérivation vectorielle, outil indispensable du mécanicien !

1. Rappels de physique

Trajectoire, **vecteur position** d'un point et **vecteur vitesse** d'un point

$$\overrightarrow{V(P/S,t)}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\right]_E(t)$$



Vecteur accélération d'un point

$$\overrightarrow{\Gamma(P/S,t)}=\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(P/S,t)}\right]_E(t)$$

1. Rappels de physique utiles pour la suite

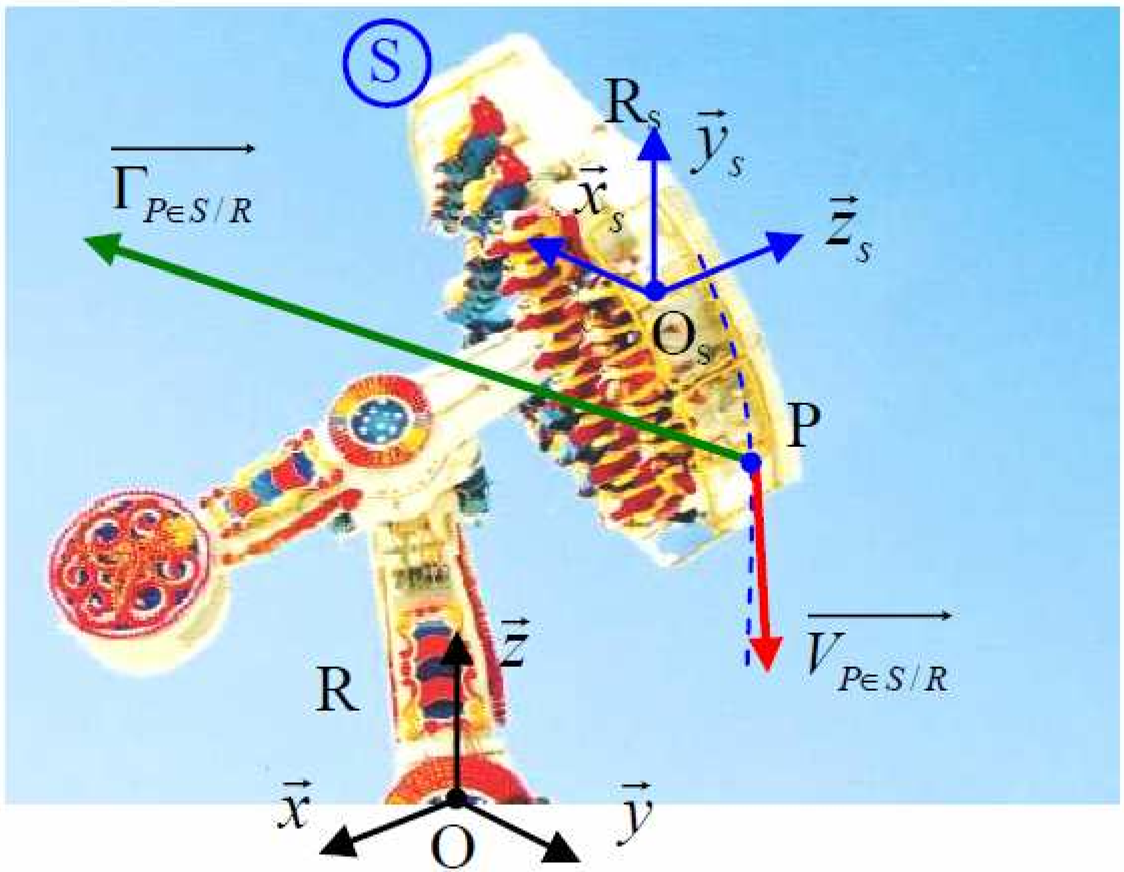
2. Vecteur vitesse et accélération d’un point d’un solide

3. Vecteur vitesse instantané de rotation

4. La dérivation vectorielle, outil indispensable du mécanicien !

2. Vecteur vitesse et accélération d'un point d'un solide

Vecteur accélération d'un point d'un solide



1. Rappels de physique utiles pour la suite

2. Vecteur vitesse et accélération d’un point d’un solide

3. Vecteur vitesse instantané de rotation

4. La dérivation vectorielle, outil indispensable du mécanicien !

3. Vecteur vitesse instantané de rotation

Vecteur vitesse instantané de rotation de R2 par rapport à R1

$$\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} = \dot{\theta}_{12}.\vec{z}_1 = \dot{\theta}_{12}.\vec{z}_2$$

Quantifie :

Par sa direction, la direction de l'axe autour duquel R2 tourne autour de R1.

Par sa norme, la vitesse angulaire avec laquelle se fait cette rotation (unité : rad/s).

Par son sens, le sens dans lequel se fait cette rotation.

1. Rappels de physique utiles pour la suite
2. Vecteur vitesse et accélération d'un point d'un solide
3. Vecteur vitesse instantané de rotation
4. **La dérivation vectorielle, outil indispensable du mécanicien !**

4. La dérivation vectorielle

TRAJECTOIRE, VITESSE ET ACCELERATION

Si l'on considère une courbe de classe C^2

$$p = p(t),$$

elle peut être considérée comme la *trajectoire* suivie par un point p durant son mouvement

Le *vecteur vitesse* **v** est défini comme la dérivée temporelle de la trajectoire :

$$\mathbf{v} = \frac{dp}{dt} = \dot{p}\,;$$

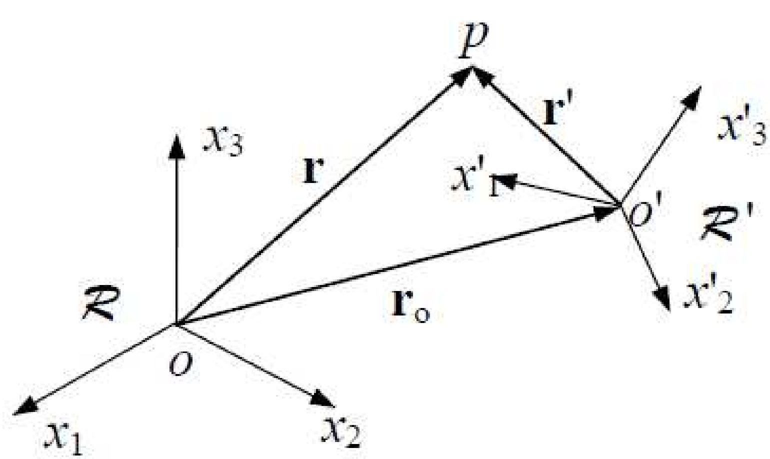
Le *vecteur accélération* **a** est défini comme la dérivée temporelle de **v** :

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{p}\,.$$

4. La dérivation vectorielle

REPERES FIXES ET MOBILES

Considérons deux repères en $\mathcal{E}$: un repère $\mathcal{R} = \{o; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, où la position d'un point p est donnée par le vecteur $\mathbf{r} = p - o = x_i\, \mathbf{e}_i$, et un repère $\mathcal{R}' = \{o'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, où la position du même point p est déterminée par le vecteur $\mathbf{r}' = p - o' = x'_i\, \mathbf{e}'_i$. Soit $\mathbf{r}_o$ le vecteur position du point o', origine du repère $\mathcal{R}'$, par rapport au repère $\mathcal{R}$, voir la figure. Considérons le repère $\mathcal{R}$ comme *fixe* et le repère $\mathcal{R}'$ comme *mobile*.



Soit le point p en mouvement avec la loi

$$p - o = p(t) - o = \mathbf{r}(t).$$

On appelle *vitesse absolue* le vecteur

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{p} = \frac{dp}{dt}.$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{r}',$$

et donc

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_o + \mathbf{r}')^{\cdot} = \dot{\mathbf{r}}_o + \dot{\mathbf{r}}';$$

on appelle alors *vitesse d'entraînement* le vecteur

$$\mathbf{v}_o = \dot{\mathbf{r}}_o,$$

qui est la vitesse de déplacement du point o'. Ensuite

$$\dot{\mathbf{r}}' = (x'_i\,\mathbf{e}'_i)^{\cdot} = \dot{x}'_i\,\mathbf{e}'_i + x'_i\,\dot{\mathbf{e}}'_i;$$

dans cette dernière relation, la quantité

$$\mathbf{v}' = \dot{x}'_i\,\mathbf{e}'_i$$

exprime la vitesse de p par rapport au repère $\mathcal{R}'$, et on l'appelle *vitesse relative*.

$$\dot{\mathbf{e}}'_i = \mathbf{S}\mathbf{e}'_i$$

et donc

$$x'_i\,\dot{\mathbf{e}}'_i = x'_i\,\mathbf{S}\mathbf{e}'_i = \mathbf{S}\,x'_i\,\mathbf{e}'_i = \mathbf{S}\,\mathbf{r}'$$

$\mathbf{S}$ est antisymétrique $\quad \mathbf{S}\mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' \;\; \forall\, \mathbf{r}'$

On définit *produit vectoriel* de deux vecteurs **a** et **b** de $\mathcal{V}$ le vecteur

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{W}_a \mathbf{b}\,,$$

où $\mathbf{W}_a$ est un tenseur antisymétrique, appelé *tenseur axial* de **a**; si **a**= (a_1, a_2, a_3), alors les composantes de $\mathbf{W}_a$ sont données par

$$\mathbf{W}_a = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le produit vectoriel se réduit donc à une simple opération tensorielle:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 b_2 + a_2 b_3 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ -a_2 b_1 + a_1 b_2 \end{pmatrix}.$$

4. La dérivation vectorielle

En généralisant ce qu'on a vu avec la vitesse, si on a un vecteur $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$, dans le repère $\mathcal{R}'$ il est

$$\mathbf{u}=u'_i\,\mathbf{e}'_i \;\Rightarrow\; \dot{\mathbf{u}}=\dot{u}'_i\,\mathbf{e}'_i+u'_i\,\dot{\mathbf{e}}'_i=\dot{u}'_i\,\mathbf{e}'_i+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{u},$$

comme on a vu pour la vitesse. Alors $\dot{\mathbf{u}}$ est la *dérivée absolue*,

$$\dot{\mathbf{u}}_R=\dot{u}'_i\,\mathbf{e}'_i$$

est la *dérivée relative* et

$$\dot{\mathbf{u}}=\dot{\mathbf{u}}_R+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{u} \qquad \textit{formule de Poisson}$$

Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$, vecteur axial du tenseur de spin, est la *vitesse de rotation* ou *angulaire*, du repère $\mathcal{R}'$; il est le vecteur propre de $\mathbf{S}$ relatif à la seule valeur propre réelle de $\mathbf{S}$, le zéro. Finalement on peut écrire

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_o+\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r}',$$

qui est la *première loi de la cinématique*.

4. La dérivation vectorielle

Le vecteur

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{p}$$

s'appelle *accélération absolue* du point p ; l'accélération absolue s'obtient donc par double dérivation temporelle de la position du point dans le repère fixe $\mathcal{R}$. Par la première loi de la cinématique on a donc

$$\mathbf{a} = (\mathbf{v}_o + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}')^{\cdot} = \dot{\mathbf{v}}_o + \dot{\mathbf{v}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\mathbf{r}}' ;$$