

Théorie de la plasticité

par **Jean COURBON**

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

1. Déformations plastiques des structures	A 350 - 2
2. Critère de plasticité en variables généralisées	— 3
2.1 Cas particulier où les matrices Q et q se réduisent à des scalaires.....	— 3
2.1.1 Structures élastoplastiques écrouissables	— 3
2.1.2 Structures élastoplastiques parfaites (ou élastiques-parfaitement plastiques)	— 3
2.1.3 Structures plastiques parfaites (ou rigides-plastiques).....	— 4
2.2 Cas général.....	— 4
2.2.1 Structures élastoplastiques parfaites.....	— 4
2.2.2 Structures plastiques parfaites.....	— 5
3. Principe du travail plastique maximal. Ses conséquences	— 5
3.1 Principe du travail plastique maximal	— 5
3.2 Conséquences du principe du travail plastique maximal	— 5
3.2.1 La frontière du domaine d'élasticité n'a pas de points singuliers..	— 5
3.2.2 La frontière du domaine d'élasticité a des points singuliers	— 6
3.2.3 Application aux structures plastiques parfaites.....	— 7
4. Déviateurs des tenseurs contrainte et déformation	— 7
4.1 Déviateur du tenseur contrainte.....	— 7
4.2 Déviateur du tenseur déformation.....	— 7
4.3 Relations entre les contraintes et les déformations en élasticité	— 7
4.4 Expression de l'énergie de déformation en fonction du déviateur du tenseur contrainte	— 8
5. Principaux critères de plasticité.....	— 8
5.1 Critères de plasticité dans l'espace	— 8
5.1.1 La frontière du domaine d'élasticité n'a pas de points singuliers..	— 8
5.1.2 La frontière du domaine d'élasticité a des points singuliers	— 9
5.2 Critères de plasticité dans le plan	— 10
5.2.1 Contrainte plane	— 10
5.2.2 Déformation plane.....	— 11
6. Problèmes de plasticité.....	— 11
6.1 Généralités	— 11
6.1.1 Problèmes d'équilibre élastoplastique	— 11
6.1.2 Problèmes d'écoulement plastique.....	— 12
6.2 Problèmes élémentaires d'équilibre élastoplastique	— 12
6.2.1 Enveloppe sphérique soumise à une pression intérieure.....	— 12
6.2.2 Tube cylindrique soumis à une pression intérieure.....	— 14
6.2.3 Anneau circulaire mince soumis à une pression intérieure.....	— 15
7. Lignes de glissement en déformation plane.....	— 16
8. États limites d'équilibre des structures plastiques parfaites	— 18
8.1 Définition des états limites d'équilibre	— 18
8.2 Forme globale du principe du travail plastique maximal	— 18
8.3 Théorèmes fondamentaux.....	— 18
8.4 Application des théorèmes fondamentaux	— 19
9. Théorème fondamental de l'adaptation	— 19
Pour en savoir plus.....	Doc. A 350

Considérons une structure à l'état naturel : en tout point de la structure, les composantes du tenseur déformation et du tenseur contrainte sont nulles. Sous l'effet de causes extérieures variées, cette structure peut subir des changements d'états. Nous nous bornons aux changements d'états qui peuvent être caractérisés par un changement très faible de la forme et des dimensions de la structure ; nous conservons donc l'une des hypothèses fondamentales de la **théorie de l'élasticité** (article **Théorie de l'élasticité** [A 305] dans le présent traité) : **la transformation qui amène la structure de l'état naturel à l'état déformé est infiniment petite.**

1. Déformations plastiques des structures

La transformation, qui amène un point matériel de la structure d'une position initiale de coordonnées (x, y, z) à une position finale de coordonnées $(x + u, y + v, z + w)$, est définie par les six composantes du **tenseur déformation** (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303] dans ce traité) :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ces six composantes vérifient donc les **conditions d'intégrabilité** :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial z^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

En particulier, si l'on applique des forces extérieures à la structure supposée à l'état naturel, des déformations apparaissent. Lorsque la suppression des forces appliquées entraîne le retour à l'état naturel, la structure est *élastique*. Dans ce cas, le travail dépensé pour déformer la structure à partir de l'état naturel est emmagasiné dans la structure sous forme d'énergie potentielle ; ce travail est le potentiel élastique (ou énergie de déformation) de la structure (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans ce traité).

Une structure élastique est une idéalisation imparfaite d'une structure réelle, car la suppression des forces appliquées à la structure n'entraîne pas toujours le retour à l'état naturel ; une *déformation permanente* peut subsister.

Nous sommes ainsi amenés à définir les déformations non élastiques ou *déformations plastiques*. Considérons donc une structure en équilibre soumise à une densité volumique de force de

composantes (X, Y, Z) et à une densité surfacique de force de composantes $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$. Les composantes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ du **tenseur contrainte** vérifient (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303]) les **équations d'équilibre** :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

et satisfont aux **conditions aux limites** sur la surface :

$$\left. \begin{aligned} \alpha \sigma_1 + \beta \tau_3 + \gamma \tau_2 &= \bar{X} \\ \alpha \tau_3 + \beta \sigma_2 + \gamma \tau_1 &= \bar{Y} \\ \alpha \tau_2 + \beta \tau_1 + \gamma \sigma_3 &= \bar{Z} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Si le comportement de la structure était élastique, les composantes du tenseur déformation seraient données par les formules classiques de la théorie de l'élasticité :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], & \gamma'_1 &= \frac{1+\nu}{E} \tau_1 \\ \varepsilon'_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)], & \gamma'_2 &= \frac{1+\nu}{E} \tau_2 \\ \varepsilon'_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)], & \gamma'_3 &= \frac{1+\nu}{E} \tau_3 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

dans lesquelles E désigne le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

Mais en général le comportement de la structure n'est pas élastique, et la déformation réelle $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ définie par les formules (1) est différente de la déformation élastique $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$ définie par les formules (5) ; nous poserons :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1, & \varepsilon_2 &= \varepsilon'_2 + \varepsilon''_2, & \varepsilon_3 &= \varepsilon'_3 + \varepsilon''_3 \\ \gamma_1 &= \gamma'_1 + \gamma''_1, & \gamma_2 &= \gamma'_2 + \gamma''_2, & \gamma_3 &= \gamma'_3 + \gamma''_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Par définition $(\varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \varepsilon''_3, \gamma''_1, \gamma''_2, \gamma''_3)$ sont les composantes du **tenseur déformation plastique**.

Des déformations élastiques, et par suite des contraintes, peuvent exister dans une structure réelle en l'absence de forces extérieures appliquées à cette structure. Par exemple, si l'application des forces extérieures a eu pour effet de déformer plastiquement certains éléments de la structure, il peut se faire qu'après suppression de ces forces la permanence des déformations plastiques dans ces éléments empêche le retour à l'état non déformé d'éléments voisins

qui n'ont pas été déformés plastiquement lors de l'application des forces extérieures. Il en est ainsi lorsque les composantes du tenseur déformation plastique ne vérifient pas les conditions d'intégrabilité (2). Dans ces conditions, la déformation permanente que l'on observe après suppression des forces appliquées est la somme d'une déformation plastique et d'une déformation élastique donnant lieu à un état de contrainte non nul en l'absence de forces extérieures.

Nous dirons qu'une structure dont l'état de contrainte n'est pas nul en l'absence de forces extérieures est dans un **état d'autocontrainte** (on dit aussi *état de coaction* ou *état de contrainte propre*).

Il ne faut pas croire qu'un état d'autocontrainte puisse uniquement résulter de l'application des forces extérieures entraînant une déformation plastique. Une élévation de température non uniforme, un retrait inégal de la matière peuvent aussi entraîner un état d'autocontrainte. Toutes ces causes ont cependant un caractère commun : l'état d'autocontrainte résulte d'une déformation imposée (déformation plastique, dilatation, retrait) qui ne vérifie pas les conditions d'intégrabilité (2).

Remarque : lorsque la déformation imposée ($\varepsilon_1'', \varepsilon_2'', \varepsilon_3'', \gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3''$) est connue, l'état de contrainte de la structure peut être déterminé au moyen du théorème fondamental de Colonnetti (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le présent traité).

2. Critère de plasticité en variables généralisées

Le critère de plasticité est la condition à laquelle doit satisfaire le tenseur contrainte en un point de la structure pour qu'une déformation plastique soit susceptible de se produire en ce point. Nous utiliserons des variables généralisées (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303]). En un point de la structure, la déformation est définie par une matrice colonne q et la contrainte est définie par une matrice colonne Q . Les éléments q_1, q_2, \dots, q_n de la matrice q et les éléments Q_1, Q_2, \dots, Q_n de la matrice Q peuvent également être considérés comme les composantes des vecteurs \vec{q} et \vec{Q} . Les variables généralisées q_i et Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont choisies de façon que le travail unitaire de la contrainte Q pour une variation dq de la déformation ait pour valeur :

$$d\mathcal{E} = Q^t dq = \vec{Q} \cdot \vec{dq} = \sum_i Q_i dq_i$$

avec Q^t matrice transposée de Q .

2.1 Cas particulier où les matrices Q et q se réduisent à des scalaires

Dans ce cas simple où la déformation est définie par la seule variable géométrique q et, la contrainte, par la seule variable mécanique Q , l'état en un point de la structure peut être représenté par le point de coordonnées (q, Q) dans un système d'axes Oq et OQ . Plusieurs lois de comportement peuvent être envisagées.

2.1.1 Structures élastoplastiques écrouissables

Si l'on fait croître la contrainte Q à partir de l'état naturel figuré par O , le point (q, Q) décrit une courbe OAC jusqu'au point C qui correspond à la rupture ; de même, si l'on fait décroître Q à partir

de l'état naturel, le point (q, Q) décrit une courbe OB jusqu'au point B qui correspond à la rupture. La partie BA de la courbe $DBAC$ est un segment de droite (figure 1).

Tant que les variations de Q à partir de l'état naturel sont telles que Q reste compris entre les ordonnées Q_e et Q'_e des points A et B , le comportement est élastique, et la relation entre q et Q est une simple loi de proportionnalité :

$$q = LQ$$

L étant une constante appelée *coefficient d'élasticité*.

Si, après avoir fait croître Q de l'état naturel jusqu'à une valeur $Q_1 > Q_e$, on fait décroître Q de Q_1 à 0, le point figuratif (q, Q) , après avoir décrit OAP pendant la charge, suit le segment de droite PP' parallèle à BA pendant la décharge ; il existe donc une *déformation résiduelle permanente* $\overline{OP'}$. Si l'on fait de nouveau croître Q , le point figuratif décrit d'abord le segment de droite $P'P$, puis l'arc PC de la courbe APC ; tout se passe donc, la déformation permanente étant acquise, comme si la limite supérieure d'élasticité Q_e avait été portée à $Q_1 > Q_e$; c'est le phénomène de l'**écrouissage** ; l'expérience montre que la limite inférieure d'élasticité est également augmentée et devient $Q'_1 > Q'_e$; c'est l'**effet Bauschinger**.

2.1.2 Structures élastoplastiques parfaites (ou élastiques-parfaitement plastiques)

Dans ce cas, la courbe $DBAC$ de la figure 1 se compose d'un segment de droite BA et deux demi-droites AC et BD parallèles à l'axe Oq (figure 2), il n'y a donc pas d'écrouissage.

Lorsque Q varie, à partir de l'état naturel, entre la limite inférieure d'élasticité Q'_e et la limite supérieure d'élasticité Q_e , le comportement est élastique et q est proportionnel à Q , soit :

$$q = LQ$$

Lorsque $Q = Q_e$, la déformation q est la somme d'une déformation élastique constante $q' = LQ_e$ et d'une déformation plastique q'' positive ou nulle indéterminée.

Lorsque $Q = Q'_e$, la déformation q est la somme d'une déformation élastique constante $q' = LQ'_e$ et d'une déformation plastique q'' négative ou nulle indéterminée.

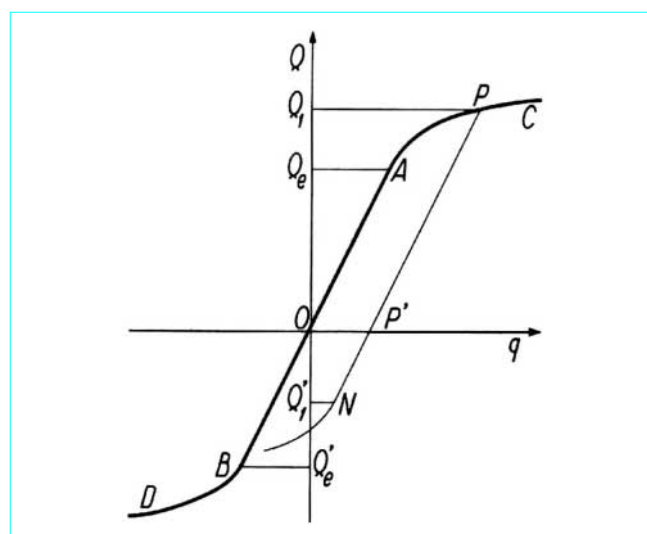


Figure 1 – Structure élastoplastique écrouissable

Un point M de coordonnées (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) appartient au domaine d'élasticité (\mathcal{E}) si toutes les inégalités strictes suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} F_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &< 0 \\ F_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &< 0 \\ &\dots\dots\dots \\ F_k(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) &< 0 \end{aligned}$$

Il y a déformation plastique éventuelle, sans qu'on puisse préciser comment s'effectue cette déformation, lorsqu'au moins une des égalités (12) est vérifiée.

Les valeurs positives des fonctions $F_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ n'ont pas de sens.

2.2.2 Structures plastiques parfaites

Ce sont des structures élastoplastiques parfaites dont la matrice d'élasticité L est nulle. Dans ce cas, la déformation élastique est nulle, et la déformation q se réduit à la seule déformation plastique q'' . Le domaine (\mathcal{E}) est alors appelé **domaine de rigidité**.

3. Principe du travail plastique maximal. Ses conséquences

3.1 Principe du travail plastique maximal

Supposons qu'il se produise en un point d'une structure élastoplastique parfaite une déformation plastique $\delta q''_i = \dot{q}''_i \delta t$. Nous savons que la contrainte Q de composantes (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) vérifie le critère de plasticité (§ 2). Pour déterminer la contrainte qui se réalise parmi toutes les contraintes possibles vérifiant le critère de plasticité, il faut recourir à une nouvelle hypothèse ; cette hypothèse est le **principe du travail plastique maximal**.

Lorsqu'un élément d'une structure élastoplastique parfaite subit une déformation plastique donnée $\delta q''_i$, l'état de contrainte qui se réalise rend maximal le travail de déformation plastique par unité de volume :

$$\tau = \sum_i Q_i \delta q''_i$$

Si nous définissons la **puissance de dissipation spécifique** par :

$$\mathcal{D} = \sum_i Q_i \dot{q}''_i = \vec{Q} \cdot \vec{\dot{q}}'' \quad (13)$$

le principe du travail plastique maximal peut également s'énoncer.

Lorsqu'un élément d'une structure élastoplastique parfaite subit une déformation plastique donnée, l'état de contrainte qui se réalise rend maximale la puissance de dissipation spécifique.

L'énoncé du principe du travail plastique maximal est dû à Hill (fiche documentaire [Doc. A 350]).

3.2 Conséquences du principe du travail plastique maximal

Nous allons déduire du principe du travail plastique maximal d'importantes propriétés des structures élastoplastiques parfaites dans les deux cas étudiés ci-après.

3.2.1 La frontière du domaine d'élasticité n'a pas de points singuliers

Dans ce cas, la puissance de dissipation spécifique \mathcal{D} est une fonction des variables Q_1, Q_2, \dots, Q_n liées par la relation (11) ; le maximum de \mathcal{D} s'obtient en annulant les dérivées de la fonction :

$$\sum_i Q_i \dot{q}''_i - \lambda F(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

λ étant un paramètre appelé *multiplicateur de Lagrange*.

Nous obtenons ainsi les relations :

$$\dot{q}''_1 = \lambda \frac{\partial F}{\partial Q_1}, \quad \dot{q}''_2 = \lambda \frac{\partial F}{\partial Q_2}, \quad \dots, \quad \dot{q}''_n = \lambda \frac{\partial F}{\partial Q_n} \quad (14)$$

qui définissent la **loi de la déformation plastique**.

Le vecteur vitesse de déformation plastique $\vec{\dot{q}}''$ est normal à la surface (\mathcal{L}) au point M de cette surface représentant la contrainte (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) au moment de la déformation plastique.

Les figures 4 et 5 illustrent le résultat précédent lorsque $n = 2$.

La puissance de dissipation spécifique est égale au produit scalaire des vecteurs \vec{Q} et $\vec{\dot{q}}''$. La puissance de dissipation spécifique $\mathcal{D} = \vec{OM} \cdot \vec{\dot{q}}''$ au moment de la déformation plastique est supérieure ou égale à toute puissance de dissipation spécifique calculée pour une contrainte dont le point figuratif M' appartient au domaine (\mathcal{E}) ou à la surface (\mathcal{L}) , donc :

$$\vec{OM} \cdot \vec{\dot{q}}'' - \vec{OM'} \cdot \vec{\dot{q}}'' = \vec{M'M} \cdot \vec{\dot{q}}'' \geq 0$$

Cette inégalité montre que le domaine (\mathcal{E}) se trouve tout entier d'un même côté du plan tangent en M à la surface (\mathcal{L}) ; il en résulte que le **domaine d'élasticité (\mathcal{E}) est convexe**.

Puisqu'il faut dépenser un travail qui ne peut être récupéré pour déformer plastiquement la matière, la puissance de dissipation spécifique est toujours positive. Compte tenu des relations (14), nous avons :

$$\mathcal{D} = \lambda \sum_i Q_i \frac{\partial F}{\partial Q_i} = \lambda \vec{OM} \cdot \vec{\text{grad}} F$$

La fonction F prenant des valeurs négatives dans (\mathcal{E}) (§ 2.2.1), le vecteur $\vec{\text{grad}} F$ est dirigé suivant la normale extérieure à la surface (\mathcal{L}) . Le point O étant intérieur au domaine convexe (\mathcal{E}) , le produit scalaire $\vec{OM} \cdot \vec{\text{grad}} F$ est positif. Le facteur λ doit donc être positif ; mais comme il se peut que la déformation plastique de l'élément considéré soit empêchée par les éléments voisins, nous énoncerons : **le facteur λ qui intervient dans la loi de la déformation plastique est positif ou nul**.

Donnons-nous le vecteur vitesse de déformation plastique \vec{q}'' .

Dans le cas général, le vecteur contrainte correspondant $\vec{Q} = \vec{OM}$ est unique (figure 4). Dans le cas particulier où une partie du plan tangent en M à la surface (\mathcal{L}) appartient à la surface (\mathcal{L}) , il existe une infinité de vecteurs contrainte \vec{Q} correspondant au vecteur \vec{q}'' (figure 5), mais tous ces vecteurs donnent au produit scalaire $\vec{Q} \cdot \vec{q}''$ la même valeur. Il en résulte que la puissance de dissipation spécifique \mathcal{D} n'est fonction que des vitesses de déformation plastique \dot{q}_i'' :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{q}_1'', \dot{q}_2'', \dots, \dot{q}_n'')$$

3.2.2 La frontière du domaine d'élasticité a des points singuliers

Dans ce cas, la surface (\mathcal{L}) est la réunion d'un nombre fini k de morceaux de surfaces (\mathcal{L}_i) d'équations (12). Lorsque le point figuratif de la contrainte se trouve sur une seule surface (\mathcal{L}_i) , toutes les démonstrations faites au paragraphe 3.2.1 subsistent.

Supposons donc que le point figuratif de la contrainte soit un point singulier de la surface (\mathcal{L}) , donc appartienne à l'intersection de $h \leq k$ surfaces (\mathcal{L}_i) ; dans ces conditions, la contrainte vérifie h des équations (12), par exemple :

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_h = 0 \quad (15)$$

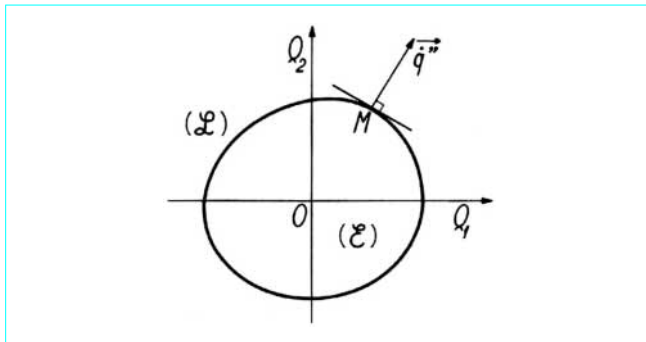


Figure 4 – Vitesse de déformation plastique : cas général

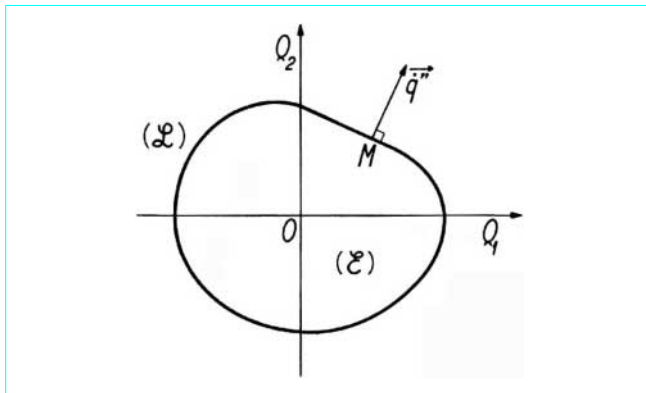


Figure 5 – Vitesse de déformation plastique : cas particulier où une partie du plan tangent en M à (\mathcal{L}) appartient à (\mathcal{L})

Pour exprimer que la puissance de dissipation spécifique \mathcal{D} , fonction des variables Q_1, Q_2, \dots, Q_n liées par les relations (15), est maximale, nous annulons les dérivées de la fonction :

$$\sum_i Q_i \dot{q}_i'' - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 - \dots - \lambda_h F_h$$

les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ étant les multiplicateurs de Lagrange.

Nous obtenons ainsi la loi de la déformation plastique :

$$\dot{q}_i'' = \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} + \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial Q_i} + \dots + \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial Q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

La convexité du domaine d'élasticité (\mathcal{E}) s'établit de la façon suivante : si l'on choisit tous les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ nuls sauf l'un d'entre eux λ_j , le raisonnement fait au paragraphe 3.2.1 montre que (\mathcal{E}) est tout entier d'un même côté du plan tangent en M à la surface (\mathcal{L}_j) .

Compte tenu des relations (16), la puissance de dissipation spécifique a pour valeur :

$$\mathcal{D} = \sum_j \lambda_j \sum_i Q_i \frac{\partial F_j}{\partial Q_i} = \sum_j \lambda_j (\vec{OM} \cdot \vec{\text{grad}} F_j)$$

et, puisque les fonctions F_j sont négatives dans (\mathcal{E}) (§ 2.2.1), les produits scalaires $\vec{OM} \cdot \vec{\text{grad}} F_j$ sont positifs. La puissance de dissipation spécifique étant positive ou nulle, nous voyons que les facteurs λ_j qui interviennent dans la loi de la déformation plastique sont positifs ou nuls.

Enfin, la même démonstration qu'au paragraphe 3.2.1 montre que la puissance de dissipation spécifique n'est fonction que des vitesses de déformation plastique.

La figure 6 donne un exemple simple du cas particulier qui vient d'être étudié ; le point M est à l'intersection des courbes (\mathcal{L}_1) et (\mathcal{L}_2) ; le vecteur \vec{q}'' reste dans l'angle des normales extérieures \vec{n}_1 et \vec{n}_2 en M aux courbes (\mathcal{L}_1) et (\mathcal{L}_2) . Ce cas particulier peut se déduire du cas général en raccordant de façon continue les courbes (\mathcal{L}_1) et (\mathcal{L}_2) par un arc de courbe dont on fait tendre la longueur vers zéro.

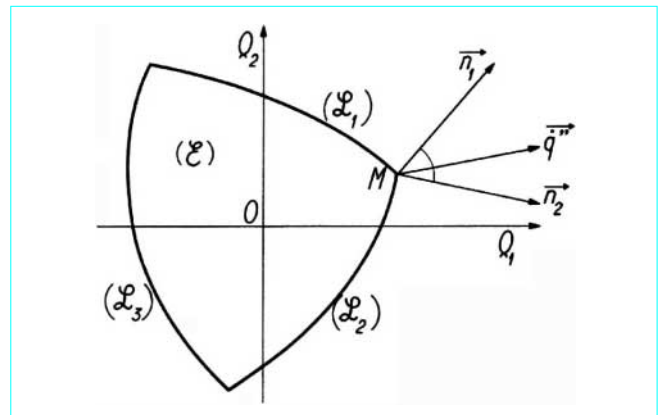


Figure 6 – Vitesse de déformation plastique en un point singulier de (\mathcal{L})

3.2.3 Application aux structures plastiques parfaites

Les résultats précédents s'appliquent aux *structures plastiques parfaites*. Dans ce cas, nous avons $\dot{q}_i'' = \dot{q}_i$, et la puissance de dissipation spécifique n'est fonction que des vitesses de déformation \dot{q}_i :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

Dans le cas des structures plastiques parfaites, le principe du travail plastique maximal (§ 3.1) peut être démontré lorsque la déformation d'un élément de la structure, considéré comme infiniment petit à l'échelle macroscopique, résulte de multiples glissements obéissant à une loi de déformation parfaitement plastique. Par contre, le principe du travail plastique maximal n'est pas valable pour des milieux comme les terres où la déformation plastique résulte de glissements obéissant à la **loi du frottement de Coulomb**. Cette remarque est due à M. Mandel (fiche documentaire [Doc. A 350]).

4. Déviateurs des tenseurs contrainte et déformation

Nous donnons dans ce paragraphe quelques compléments nécessaires pour l'étude des principaux critères de plasticité utilisés.

4.1 Déviateur du tenseur contrainte

Nous désignons par σ_{ij} les composantes du tenseur contrainte relativement à trois axes rectangulaires $Ox_1 x_2 x_3$ (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303] dans ce traité) ; nous avons $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Si l'on désigne par σ la contrainte normale moyenne (c'est le tiers du *premier invariant* du tenseur contrainte) :

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

le **déviateur du tenseur contrainte** est le tenseur de composantes :

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} \quad (s_{ij} = s_{ji}) \quad (17)$$

δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } i = j \\ 0 & \text{lorsque } i \neq j \end{cases}$$

Il est immédiat de vérifier que le *premier invariant* J_1 du déviateur est nul :

$$J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0 \quad (18)$$

Le *deuxième invariant* J_2 du déviateur a pour expression :

$$J_2 = s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2 - s_{11}s_{22} - s_{22}s_{33} - s_{33}s_{11}$$

que l'on peut également écrire, en tenant compte de la formule (18) :

$$J_2 = \frac{1}{2} (s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 + 2s_{12}^2 + 2s_{23}^2 + 2s_{31}^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij}^2 \quad (19)$$

Il est intéressant de connaître l'expression de J_2 en fonction des composantes du tenseur contrainte :

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] \quad (20)$$

et en fonction des contraintes principales σ_I, σ_{II} et σ_{III} :

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] \quad (21)$$

De l'expression (20), nous déduisons aisément l'identité :

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \quad (22)$$

Le *dernier invariant* J_3 du déviateur a pour expression :

$$J_3 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} \quad (23)$$

et l'on peut vérifier l'identité :

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{ij}} = \sum_k s_{jk} s_{ki} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \quad (24)$$

4.2 Déviateur du tenseur déformation

Nous désignons par ε_{ij} les composantes du tenseur déformation relativement aux axes $Ox_1 x_2 x_3$ (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303]) ; nous avons $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Si l'on désigne par ε la dilatation moyenne :

$$\varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

le **déviateur du tenseur déformation** est le tenseur de composantes :

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij} \quad (e_{ij} = e_{ji}) \quad (25)$$

δ_{ij} désignant toujours le symbole de Kronecker.

4.3 Relations entre les contraintes et les déformations en élasticité

Les relations classiques de la théorie de l'élasticité (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans ce traité) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} [\sigma_{ii} - \nu (\sigma_{jj} + \sigma_{kk})] \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (i \neq j) \end{cases}$$

peuvent s'écrire, en faisant intervenir les déviateurs :

$$\varepsilon = \frac{1-2\nu}{E} \sigma, \quad e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} \quad (26)$$

Les relations (26) montrent que la *contrainte principale moyenne* provoque un *changement de volume sans changement de forme* (la dilatation cubique est en effet égale à 3ε), et que le *déviateur du tenseur contrainte* provoque un *changement de forme sans changement de volume* (puisque $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$).

Les déviateurs s_{ij} et e_{ij} sont leurs composantes proportionnelles ; ce sont donc des tenseurs semblables.

4.4 Expression de l'énergie de déformation en fonction du déviateur du tenseur contrainte

L'énergie de déformation d'une structure élastique est donnée par l'expression (article *Théorie de l'élasticité* [A 305]) :

$$W = \iiint_V W_e dV$$

dans laquelle W_e est la *densité d'énergie de déformation* :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Remplaçons σ_{ij} et ε_{ij} respectivement par $s_{ij} + \sigma \delta_{ij}$ et par $e_{ij} + \varepsilon \delta_{ij}$; nous obtenons :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i,j} s_{ij} e_{ij} + \frac{3}{2} \sigma \varepsilon$$

soit, compte tenu des relations (26) :

$$W_e = \frac{1}{2} \left[\frac{1+\nu}{E} \sum_{i,j} s_{ij}^2 + \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma^2 \right]$$

L'énergie de déformation W est donc la somme de l'énergie de déformation provoquant le changement de forme :

$$W_1 = \frac{1+\nu}{2E} \iiint_V \sum_{i,j} s_{ij}^2 dV = \frac{1+\nu}{E} \iiint_V J_2 dV \quad (27)$$

et de l'énergie de déformation provoquant le changement de volume :

$$W_2 = \frac{1}{2} \chi \iiint_V \sigma^2 dV \quad \text{avec} \quad \chi = \frac{3(1-2\nu)}{E}$$

χ désignant le *coefficient de compressibilité*.

5. Principaux critères de plasticité

5.1 Critères de plasticité dans l'espace

De nombreux critères de plasticité ont été proposés. Ces critères peuvent être classés en deux catégories selon que la surface (\mathcal{L}) qui limite le domaine d'élasticité a ou n'a pas de points singuliers.

5.1.1 La frontière du domaine d'élasticité n'a pas de points singuliers

Dans l'espace des contraintes, le **critère de plasticité** s'exprime par la seule équation :

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

la fonction f prenant des valeurs négatives dans le domaine d'élasticité.

La loi de la déformation plastique (14) s'écrit, λ étant positif ou nul :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{ij}'' = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & \text{lorsque } f(\sigma_{ij}) = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{ij}'' = 0 & \text{lorsque } f(\sigma_{ij}) < 0 \end{cases}$$

Lorsque le corps est *isotrope*, le critère de plasticité ne dépend pas de l'orientation des axes ; la fonction $f(\sigma_{ij})$ ne dépend donc que des invariants du tenseur contrainte, ou, ce qui revient au même, des *contraintes principales* σ_I , σ_{II} et σ_{III} (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303] dans ce traité) :

$$F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = 0$$

Les dilatations principales étant les déformations associées aux contraintes principales, la loi de la déformation plastique s'écrit, λ étant positif ou nul, et X désignant l'indice I, II ou III :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_X'' = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_X} & \text{lorsque } F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = 0 \\ \dot{\varepsilon}_X'' = 0 & \text{lorsque } F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) < 0 \end{cases}$$

Une hypothèse souvent admise pour les *corps ductiles* consiste à supposer que le *critère de plasticité ne dépend que du déviateur du tenseur contrainte* ; $f(\sigma_{ij})$ n'est fonction, si le corps est isotrope, que des invariants J_2 et J_3 du déviateur, et le critère de plasticité s'écrit :

$$H(J_2, J_3) = 0$$

La déformation plastique s'effectue alors *sans changement de volume* ; en effet, lorsque $H = 0$, les vitesses de déformation plastique ont pour valeurs, compte tenu des identités (22) et (24) :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}'' = \lambda \frac{\partial H}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \frac{\partial H}{\partial J_2} s_{ij} + \lambda \frac{\partial H}{\partial J_3} \left(\sum_k s_{jk} s_{ki} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} \right)$$

et l'on vérifie aisément que :

$$\dot{\varepsilon}_{11}'' + \dot{\varepsilon}_{22}'' + \dot{\varepsilon}_{33}'' = 0$$

Dans ce cas, la surface (\mathcal{L}) qui limite le domaine d'élasticité dans l'espace $O\sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}$ des contraintes principales est un *cylindre* dont les génératrices sont parallèles à la droite Δ d'équations $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$.

En effet, si la contrainte $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ appartient au domaine d'élasticité, il en est de même de la contrainte $(\sigma_I + h, \sigma_{II} + h, \sigma_{III} + h)$ quel que soit h , puisque le déviateur reste inchangé.

La figure 7 représente la section droite du cylindre (\mathcal{L}).

Réciproquement, si la surface (\mathcal{L}) est un cylindre de génératrices parallèles à Δ , il est aisé de montrer que le critère de plasticité ne dépend que des invariants J_2 et J_3 .

Le **critère de plasticité de Von Mises** est le plus simple des critères du type précédent :

$$J_2 - a^2 = 0 \quad (28)$$

avec a constante caractéristique du matériau.

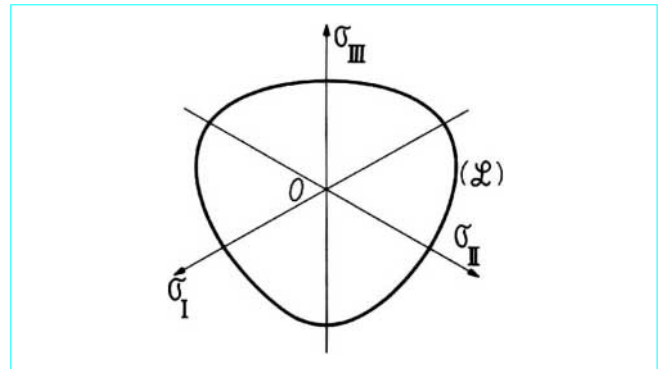


Figure 7 – Domaine d'élasticité sans point singulier

Il conduit à la **loi de déformation plastique de Lévy-Von Mises** :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}'' &= \lambda s_{ij} \text{ lorsque } J_2 = a^2 \\ \dot{\varepsilon}_{ij}'' &= 0 \text{ lorsque } J_2 < a^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

La formule (27) montre que le critère de Von Mises revient à supposer qu'il n'y a pas de déformation plastique tant que l'énergie de déformation provoquant le changement de forme ne dépasse pas une valeur donnée.

Le critère de Von Mises peut s'écrire, en utilisant la formule (21) :

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - 6a^2 = 0 \quad (30)$$

La surface (\mathcal{L}) est donc un *cylindre de révolution* d'axe Δ et de rayon $a\sqrt{2}$.

Le critère de plasticité suivant généralise le critère de Von Mises :

$$J_2 - \Phi(\sigma) = 0$$

σ désignant toujours la contrainte normale moyenne. Dans ce cas, la surface (\mathcal{L}) est une surface de révolution d'axe Δ . La fonction $\Phi(\sigma)$ doit être telle que $\Phi(0) > 0$ et que le domaine d'élasticité soit convexe.

5.1.2 La frontière du domaine d'élasticité a des points singuliers

Dans l'espace des contraintes, le **critère de plasticité** s'exprime en écrivant qu'au moins une des égalités suivantes est vérifiée :

$$f_1(\sigma_{ij}) = 0, f_2(\sigma_{ij}) = 0, \dots, f_k(\sigma_{ij}) = 0$$

les fonctions f_1, f_2, \dots, f_k prenant des valeurs négatives dans le domaine d'élasticité. Si h des fonctions précédentes, par exemple les h premières, s'annulent, il peut y avoir déformation plastique suivant la loi :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}'' = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial \sigma_{ij}}$$

Lorsque le corps est *isotrope*, le critère de plasticité ne dépend que des contraintes principales, et le domaine d'élasticité admet dans l'espace $O\sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}$ la droite Δ d'équations $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ pour axe de symétrie ternaire.

On rencontre des critères de plasticité du type précédent lorsque l'on suppose que la contrainte principale intermédiaire n'intervient pas. Le plus simple est le **critère de Tresca** : si le rayon ρ du *cercle de Mohr* (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303]) est inférieur à une constante b , la déformation est élastique ; si $\rho = b$, il peut y avoir déformation plastique. Comme on ne sait pas *a priori* quelle est la contrainte principale intermédiaire, le critère de Tresca consiste à écrire que l'une au moins des six égalités suivantes est vérifiée :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{III} - 2b &= 0 & (AB) \\ \sigma_{II} - \sigma_{III} - 2b &= 0 & (BC) \\ \sigma_{II} - \sigma_I - 2b &= 0 & (CD) \\ \sigma_{III} - \sigma_I - 2b &= 0 & (DE) \\ \sigma_{III} - \sigma_{II} - 2b &= 0 & (EF) \\ \sigma_I - \sigma_{II} - 2b &= 0 & (FA) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Dans l'espace des contraintes principales, le domaine d'élasticité est limité par un prisme de génératrices parallèles à Δ ; la section droite de ce prisme est l'hexagone régulier $ABCDEF$ représenté sur la figure 8. À la suite de chaque équation (31) nous avons écrit entre parenthèses le côté de l'hexagone représenté par cette équation.

La longueur d'un côté de l'hexagone est $(2/3) b\sqrt{6}$.

La **loi de la déformation plastique** correspondant au critère de Tresca est donnée par les **formules de Mohr**. Lorsqu'une seule équation (31) est vérifiée, la première par exemple, le point figuratif

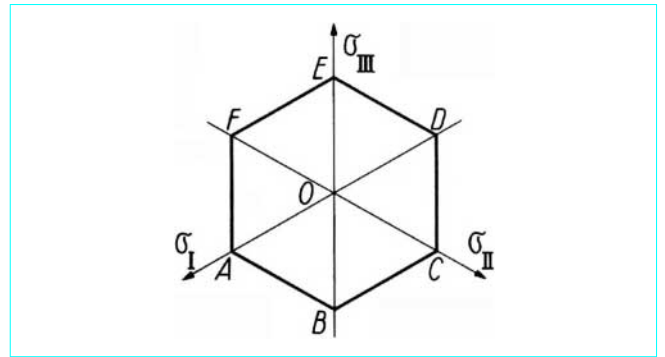


Figure 8 – Domaine d'élasticité avec points singuliers (critère de Tresca)

de la contrainte se trouve sur la face AB du prisme, et la déformation plastique a pour expression :

$$\dot{\varepsilon}_I'' = \lambda, \quad \dot{\varepsilon}_{II}'' = 0, \quad \dot{\varepsilon}_{III}'' = -\lambda \quad (\lambda \geq 0) \quad (32)$$

Lorsque deux équations (31) sont vérifiées, la première et la sixième par exemple, le point figuratif de la contrainte se trouve sur l'arête A du prisme, et la déformation plastique a pour expression :

$$\dot{\varepsilon}_I'' = \lambda + \mu, \quad \dot{\varepsilon}_{II}'' = -\mu, \quad \dot{\varepsilon}_{III}'' = -\lambda \quad (\lambda \geq 0, \mu \geq 0) \quad (33)$$

Les formules (32) et (33) montrent que l'on a toujours :

$$\dot{\varepsilon}_I'' + \dot{\varepsilon}_{II}'' + \dot{\varepsilon}_{III}'' = 0$$

La déformation plastique s'effectue donc *sans changement de volume* ; ce résultat était prévisible, puisque le critère de Tresca ne dépend que du déviateur du tenseur contrainte.

La **courbe intrinsèque de Caquot** généralise le critère de Tresca ; si ξ désigne l'abscisse du centre et ρ le rayon du cercle de Mohr, la condition de contact du cercle de Mohr et de la courbe intrinsèque se traduit par une relation de la forme :

$$\rho = f(\xi)$$

$f(\xi)$ étant, lorsque l'on compte positivement les contraintes de traction, une fonction convexe décroissante positive ; cette fonction s'annule pour la valeur ξ_0 de l'abscisse du sommet de la courbe intrinsèque.

Dans cette hypothèse, le critère de plasticité consiste à écrire que l'une au moins des six inégalités suivantes est vérifiée :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I - \sigma_{III} - \Phi(\sigma_I + \sigma_{III}) &= 0 & (AB) \\ \sigma_{II} - \sigma_{III} - \Phi(\sigma_{II} + \sigma_{III}) &= 0 & (BC) \\ \sigma_{II} - \sigma_I - \Phi(\sigma_{II} + \sigma_I) &= 0 & (CD) \\ \sigma_{III} - \sigma_I - \Phi(\sigma_{III} + \sigma_I) &= 0 & (DE) \\ \sigma_{III} - \sigma_{II} - \Phi(\sigma_{III} + \sigma_{II}) &= 0 & (EF) \\ \sigma_I - \sigma_{II} - \Phi(\sigma_I + \sigma_{II}) &= 0 & (FA) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

la fonction $\Phi(u)$, égale à $2f(u/2)$, étant également convexe, décroissante et positive.

Dans l'espace des contraintes principales, le domaine d'élasticité est limité par une surface admettant la droite Δ pour axe de symétrie ternaire. Cette surface a un sommet (ξ_0, ξ_0, ξ_0) situé sur Δ , et possède six arêtes curvilignes qui se rejoignent au sommet. La figure 9 représente une section de cette surface par un plan normal à Δ ; cette section est un hexagone curviligne $ABCDEF$ invariant dans une rotation d'angle $2\pi/3$ autour de son centre ; il est possible de démontrer que $OA < OB$. La figure 10 donne une section de la surface par le plan $O\sigma_I\sigma_{II}$.

Lorsqu'une seule équation (34) est vérifiée, la première par exemple, la loi de la déformation plastique est définie par les formules :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_I'' &= \lambda [1 - \Phi'(\sigma_I + \sigma_{III})] \\ \dot{\varepsilon}_{II}'' &= 0 \\ \dot{\varepsilon}_{III}'' &= -\lambda [1 + \Phi'(\sigma_I + \sigma_{III})] \end{aligned} \right\} (\lambda \geq 0) \quad (35)$$

Lorsque deux équations (34) sont vérifiées, la première et la sixième par exemple, la loi de la déformation plastique est définie par les formules :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_I'' &= \lambda [1 - \Phi'(\sigma_I + \sigma_{III})] \\ &\quad + \mu [1 - \Phi'(\sigma_I + \sigma_{II})] \\ \dot{\varepsilon}_{II}'' &= -\mu [1 + \Phi'(\sigma_I + \sigma_{II})] \\ \dot{\varepsilon}_{III}'' &= -\lambda [1 + \Phi'(\sigma_I + \sigma_{III})] \end{aligned} \right\} (\lambda \geq 0, \mu \geq 0) \quad (36)$$

Il y a donc *changement de volume* pendant la déformation plastique.

5.2 Critères de plasticité dans le plan

Il y a lieu de distinguer deux cas : celui de la *contrainte plane* et celui de la *déformation plane*.

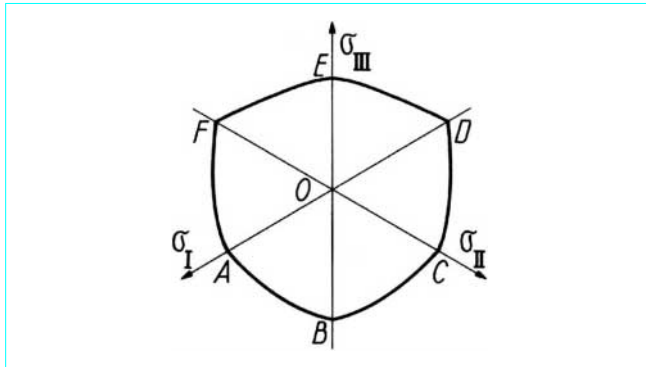


Figure 9 – Domaine d'élasticité : section par un plan normal à Δ (courbe intrinsèque de Caquot)

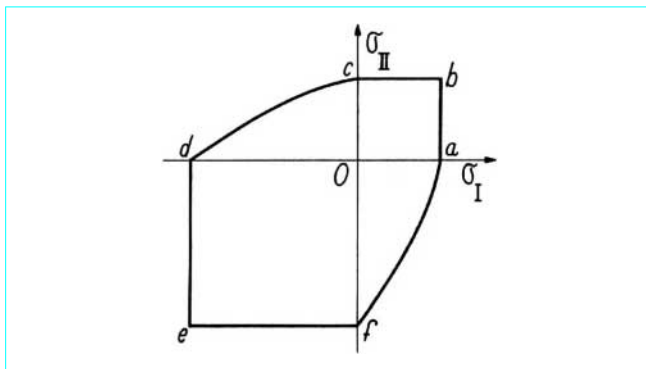


Figure 10 – Domaine d'élasticité : section par le plan $O\sigma_I\sigma_{II}$ (courbe intrinsèque de Caquot)

5.2.1 Contrainte plane

La contrainte est plane et parallèle au plan Ox_1x_2 lorsque la contrainte principale σ_{III} a une direction fixe et est nulle ; les seules composantes non nulles du tenseur contrainte sont alors σ_{11}, σ_{22} et $\sigma_{12} = \sigma_{21}$.

On rencontre des problèmes de contrainte plane dans l'étude des *plaques minces* soumises à des forces parallèles au plan moyen de la plaque et uniformément distribuées sur l'épaisseur de la plaque.

Le **critère de Von Mises** (30) se réduit dans ce cas ($\sigma_{III} = 0$) à :

$$\sigma_I^2 - \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2 - 3a^2 = 0 \quad (37)$$

Dans le plan $O\sigma_I\sigma_{II}$, le domaine d'élasticité est limité par l'ellipse d'équation (37), représentée sur la figure 11. Les axes de cette ellipse sont les bissectrices des axes $O\sigma_I$ et $O\sigma_{II}$. Voici les coordonnées de quelques points remarquables de cette ellipse : $B(a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$, $G(a, -a)$, $A(a\sqrt{3}, 0)$, $I(2a, a)$; les coordonnées des points E, H, D, K, C, F, J, L s'en déduisent par symétrie.

La **loi de la déformation plastique** correspondant au critère (37) est :

$$\dot{\varepsilon}_I'' = \lambda (2\sigma_I - \sigma_{II}), \quad \dot{\varepsilon}_{II}'' = \lambda (2\sigma_{II} - \sigma_I) \quad (\lambda \geq 0)$$

Puisque la déformation s'effectue *sans changement de volume* :

$$\dot{\varepsilon}_{III}'' = -(\dot{\varepsilon}_I'' + \dot{\varepsilon}_{II}'') = -\lambda (\sigma_I + \sigma_{II})$$

Lorsque les axes Ox_1x_2 sont choisis de façon quelconque dans le plan normal à la direction principale Ox_3 , le **critère de Von Mises** s'écrit :

$$\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - 3a^2 = 0$$

Le **critère de Tresca** s'exprime en écrivant que l'une au moins des six égalités suivantes est vérifiée :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_I - 2b &= 0, & \sigma_{II} - 2b &= 0, & \sigma_{II} - \sigma_I - 2b &= 0 \\ -\sigma_I - 2b &= 0, & -\sigma_{II} - 2b &= 0, & \sigma_I - \sigma_{II} - 2b &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

En effet, on ne sait pas *a priori* si la contrainte principale $\sigma_{III} = 0$ est la contrainte principale intermédiaire.

Dans le plan $O\sigma_I\sigma_{II}$, le domaine d'élasticité est limité par l'hexagone $ABCDEF$ représenté sur la figure 12.

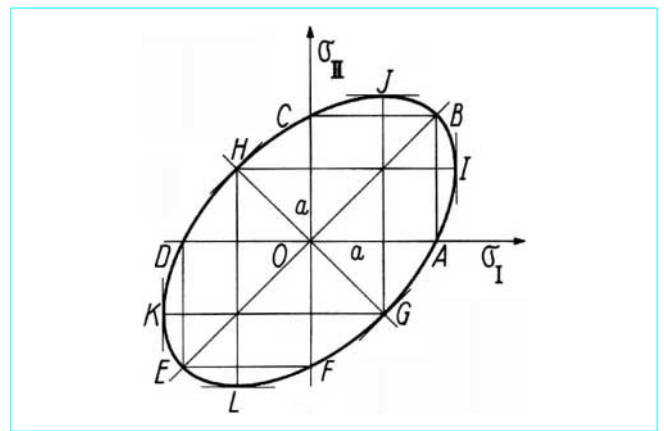


Figure 11 – Domaine d'élasticité (critère de Von Mises)

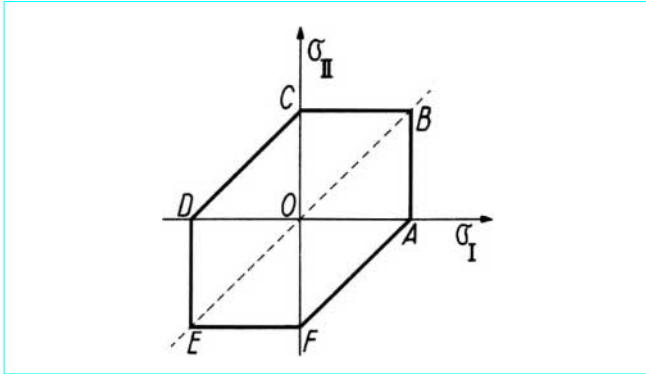


Figure 12 – Domaine d'élasticité (critère de Tresca)

Dans l'hypothèse de la **courbe intrinsèque** (§ 5.1.2), le critère de plasticité consiste à écrire que l'une au moins des six égalités suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} \sigma_I - \Phi(\sigma_I) &= 0, & \sigma_{II} - \Phi(\sigma_{II}) &= 0, & \sigma_{II} - \sigma_I - \Phi(\sigma_{II} + \sigma_I) &= 0 \\ -\sigma_I - \Phi(\sigma_I) &= 0, & -\sigma_{II} - \Phi(\sigma_{II}) &= 0, & \sigma_I - \sigma_{II} - \Phi(\sigma_I + \sigma_{II}) &= 0 \end{aligned}$$

Dans le plan $O\sigma_I\sigma_{II}$, le domaine d'élasticité est limité par le contour $abcdef$ représenté sur la figure 10.

5.2.2 Déformation plane

La déformation est plane et parallèle au plan Ox_1x_2 lorsque la dilatation principale ε_{III} a une direction fixe et est nulle.

On rencontre de nombreux problèmes de déformation plane, par **exemple** un tube cylindrique épais soumis à une pression intérieure.

Si l'on adopte le **critère de Von Mises**, on déduit de la formule (30) :

$$\dot{\varepsilon}_{III}'' = 2\lambda(2\sigma_{III} - \sigma_I - \sigma_{II})$$

Il en résulte que la contrainte principale σ_{III} est la moyenne des deux autres :

$$\sigma_{III} = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})$$

et que le critère (30) se réduit à :

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 - 4a^2 = 0 \quad (39)$$

Puisque σ_{III} est la contrainte principale intermédiaire, le critère (39) signifie que le rayon du cercle de Mohr est égal à a .

Si l'on adopte le **critère de Tresca**, les formules (32) et (33) montrent que la vitesse de dilatation principale nulle correspond à la contrainte principale intermédiaire ; la contrainte principale σ_{III} est donc la contrainte principale intermédiaire. Cette conclusion reste valable pour tout critère qui, dans l'espace, ne fait pas intervenir la contrainte principale intermédiaire, en particulier pour le critère de plasticité déduit de la courbe intrinsèque.

Dans ces conditions, les six équations (31) se réduisent aux deux équations :

$$\sigma_{II} - \sigma_I - 2b = 0, \quad \sigma_I - \sigma_{II} - 2b = 0 \quad (40)$$

qui expriment que le rayon du cercle de Mohr est égal à b .

En déformation plane les critères de plasticité de Von Mises et de Tresca sont donc équivalents ; la courbe intrinsèque se compose alors de deux droites parallèles.

En posant $K = 2a = 2b$, nous pouvons écrire les critères (39) et (40) sous la forme :

$$|\sigma_I - \sigma_{II}| - K = 0 \quad (41)$$

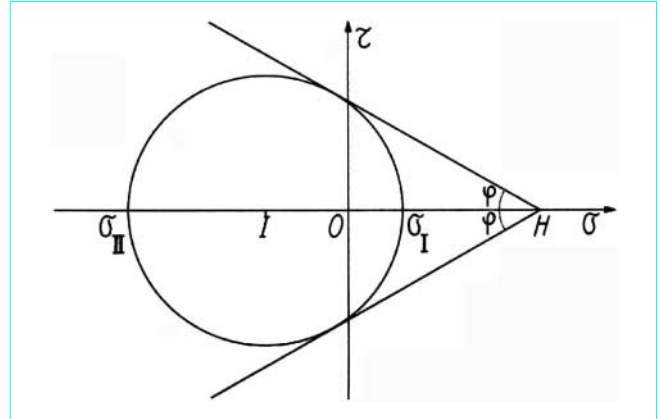


Figure 13 – Courbe intrinsèque formée de deux demi-droites

ou encore, si les axes Ox_1x_2 ont une direction quelconque dans le plan normal à la dilatation principale ε_{III} :

$$(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 - K^2 = 0$$

L'hypothèse de la **courbe intrinsèque** conduit, dans le cas de la déformation plane, au critère de plasticité :

$$|\sigma_I - \sigma_{II}| - \Phi(\sigma_I + \sigma_{II}) = 0$$

Par **exemple**, dans le cas d'une courbe intrinsèque composée de deux demi-droites qui se coupent sous l'angle 2φ au point d'abscisse H (figure 13), le critère de plasticité s'écrit :

$$|\sigma_I - \sigma_{II}| - [2H - (\sigma_I + \sigma_{II})] \sin \varphi = 0 \quad (42)$$

Le critère (42) se réduit au critère (41) lorsqu'on fait tendre φ vers zéro et H vers l'infini de façon que le produit $2H \sin \varphi$ tende vers K .

6. Problèmes de plasticité

6.1 Généralités

On rencontre deux types de problèmes de plasticité : les problèmes d'équilibre élastoplastique et les problèmes d'écoulement plastique.

6.1.1 Problèmes d'équilibre élastoplastique

Dans ce cas, la structure comporte des zones en équilibre élastique, qui empêchent les déformations plastiques de devenir illimitées dans les zones où le critère de plasticité est vérifié.

Supposons que la déformation plastique obéisse à la **loi de Lévy-Von Mises** (§ 5.1.1). Considérons un élément de la structure qui subit une déformation plastique entre les instants t_0 et t_1 ; pendant un intervalle δt , les composantes du tenseur contrainte subissent des variations $\delta\sigma_{ij}$. Décomposons le tenseur contrainte en contrainte moyenne σ et déviateur s_{ij} (§ 4.1), et le tenseur déformation en dilatation moyenne ε et déviateur e_{ij} (§ 4.2). Puisque, dans l'hypothèse du critère de Von Mises, la déformation plastique s'effectue sans changement de volume, la variation $\delta\varepsilon$ est purement élastique (§ 4.3) :

$$\delta\varepsilon = \frac{1-2\nu}{E} \delta\sigma$$

Les variations δe_{ij} des composantes du déviateur du tenseur déformation sont à la fois élastiques et plastiques. En utilisant la loi de déformation élastique (26) et la loi de déformation plastique (29), nous obtenons ainsi les **relations de Prandtl-Reuss** :

$$\left. \begin{aligned} \delta e_{ij} &= s_{ij} \delta \lambda + \frac{1+\nu}{E} \delta s_{ij} & \text{lorsque } \delta J_2 = 0 \\ \delta e_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} \delta s_{ij} & \text{lorsque } \delta J_2 < 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$\delta \lambda$ étant positif ou nul.

Ces relations ne s'intègrent pas en général, et l'on doit procéder pas à pas en divisant l'intervalle (t_0, t_1) en intervalles partiels.

Cependant, lorsque le chargement est *radial*, c'est-à-dire tel que le point $M(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ décrive une demi-droite issue de O et que les directions principales du tenseur contrainte restent fixes, on peut intégrer les relations (43) entre l'état naturel et l'état déformé ; on obtient ainsi les **relations de Hencky** :

$$\left. \begin{aligned} e_{ij} &= \left(\lambda + \frac{1+\nu}{E} \right) s_{ij} & \text{lorsque } J_2 = a^2 \\ e_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} s_{ij} & \text{lorsque } J_2 < a^2 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

6.1.2 Problèmes d'écoulement plastique

Dans ce cas où tous les éléments de la structure sont en déformation plastique, il est justifié de négliger la déformation élastique devant la déformation plastique. Conservons le critère de Von Mises. Les équations d'équilibre (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303] dans ce traité), le critère de plasticité (28) et la loi de déformation plastique de Lévy-Von Mises (29) forment un système de dix équations :

$$\left. \begin{aligned} \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i &= 0 \\ J_2 - a^2 &= 0 \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) = \lambda s_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

pour déterminer les dix fonctions inconnues σ_{ij} , \dot{u}_i et λ . Les **conditions aux limites** sont les suivantes : en chaque point de la surface limite, on se donne soit les composantes \dot{u}_i de la vitesse, soit les composantes de la contrainte qui s'exerce sur la surface limite, soit trois composantes mixtes faisant intervenir les composantes de la vitesse et de la contrainte.

En *plasticité plane* (§ 5.2), il est remarquable que les équations d'équilibre et le critère de plasticité fournissent un système de trois équations permettant de déterminer les composantes σ_{11} , σ_{22} et $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ du tenseur contrainte :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + X_1 &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + X_2 &= 0 \\ F(\sigma_I, \sigma_{II}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

les contraintes principales σ_I et σ_{II} étant les racines de l'équation :

$$X^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})X + \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = 0$$

Si l'on adopte le critère de plasticité déduit de la courbe intrinsèque, la dernière équation (46) permet d'exprimer les composantes

du tenseur contrainte en fonction de deux paramètres qui sont l'abscisse du centre ξ et le rayon ρ du cercle de Mohr. Les équations d'équilibre se transforment alors en un système de deux équations aux dérivées partielles premières vérifiées par les fonctions ξ et ρ . On démontre que les multiplicités caractéristiques de ce système ont pour traces sur le plan $Ox_1 x_2$ les lignes enveloppes des traces des éléments plans sur lesquels s'exerce la contrainte correspondant aux points de contact du cercle de Mohr avec la courbe intrinsèque. Ces lignes sont appelées **lignes de glissement** (§ 7) ; le long de ces lignes, il existe une relation entre les différentielles des paramètres ξ et ρ ; l'intégration des équations en découle.

Dans le cas particulier où le critère de plasticité est représenté par l'équation (42), le problème est celui de l'*équilibre limite des terres* (rubrique *Géotechnique. Mécanique des sols et des roches* dans le traité Construction).

6.2 Problèmes élémentaires d'équilibre élastoplastique

6.2.1 Enveloppe sphérique soumise à une pression intérieure

Soient (figure 14) a le rayon intérieur, b le rayon extérieur et p la pression intérieure. Les **contraintes principales** sont $\sigma_I = \sigma_r$ et $\sigma_{II} = \sigma_{III} = \sigma_\theta$; en un point M , la contrainte σ_r est dirigée suivant le rayon OM et la contrainte σ_θ est perpendiculaire à OM . Les critères de Von Mises et de Tresca s'expriment alors par la même égalité :

$$|\sigma_r - \sigma_\theta| - K = 0$$

Rappelons (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans ce traité) les formules qui donnent les contraintes lorsque l'équilibre est élastique :

$$\sigma_r = -p \frac{a^3(b^3 - r^3)}{r^3(b^3 - a^3)}, \quad \sigma_\theta = p \frac{a^3(2r^3 + b^3)}{2r^3(b^3 - a^3)} \quad (47)$$

r désignant la distance au centre des sphères limitant l'enveloppe.

Le diamètre 2ρ du cercle de Mohr a pour valeur :

$$2\rho = \sigma_\theta - \sigma_r = p \frac{3a^3 b^3}{2r^3(b^3 - a^3)}$$

La solution (47) est valable tant que $2\rho < K$ dans toute l'enveloppe ; le maximum de 2ρ étant obtenu pour $r = a$, la solution (47) convient donc lorsque la pression p est inférieure à la pression p_0 définie par :

$$p_0 = \frac{2}{3} K \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right) \quad (48)$$

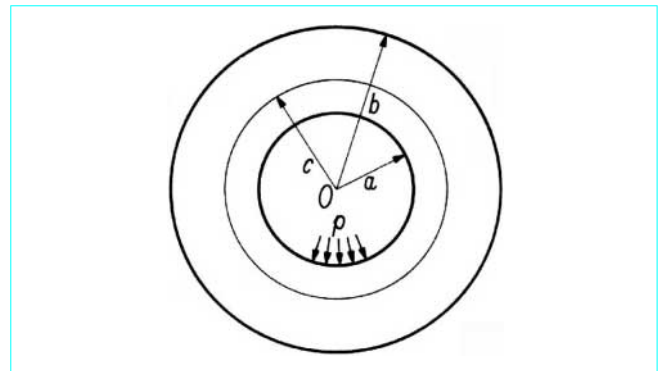


Figure 14 – Enveloppe sphérique soumise à une pression intérieure

Le déplacement d'un point de l'enveloppe dirigé suivant le rayon est :

$$U(r) = \frac{p a^3 b^3}{E(b^3 - a^3)} \left[\frac{1+\nu}{2r^2} + (1-2\nu) \frac{r}{b^3} \right]$$

En faisant $r = a$ et $p = p_0$ dans la formule précédente, nous obtenons l'augmentation $\delta_0 a$ du rayon intérieur au moment où la limite d'élasticité est atteinte sur la surface intérieure :

$$\delta_0 a = \frac{Ka}{3E} \left[(1+\nu) + 2(1-2\nu) \frac{a^3}{b^3} \right] \quad (49)$$

Lorsque p est plus grand que p_0 et plus petit que la valeur p_1 qui correspond à la *plastification totale de l'enveloppe*, il existe une sphère de rayon c qui sépare la partie en *équilibre plastique* ($a \leq r \leq c$) de la partie en *équilibre élastique* ($c \leq r \leq b$). Dans la partie en équilibre plastique, σ_r et σ_θ satisfont au critère de plasticité :

$$\sigma_\theta - \sigma_r = K$$

et aux équations d'équilibre qui se réduisent à la seule équation :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

Il en résulte que σ_r est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2K}{r}$$

qui prend la valeur $-p$ pour $r = a$. Nous trouvons ainsi :

$$\sigma_r = -p + 2K \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + K$$

Exprimons que σ_r est continu pour $r = c$; nous trouvons, en utilisant la formule (48) pour la zone élastique ($c \leq r \leq b$) où la limite d'élasticité est atteinte pour $r = c$:

$$-p + 2K \ln \frac{c}{a} = -\frac{2}{3} K \left(1 - \frac{c^3}{b^3} \right)$$

La valeur de la pression intérieure en fonction de c est donc :

$$p = 2K \ln \frac{c}{a} + \frac{2}{3} K \left(1 - \frac{c^3}{b^3} \right) \quad (50)$$

Comme :

$$\frac{dp}{dc} = \frac{2K}{c} \left(1 - \frac{c^3}{b^3} \right)$$

est toujours positif, la pression p croît constamment, lorsque c varie de a à b , depuis la valeur p_0 donnée par la formule (48) jusqu'à la valeur limite :

$$p_1 = 2K \ln \frac{b}{a} \quad (51)$$

qui correspond à la plastification totale de l'enveloppe ; p_1 est la plus petite valeur de la pression intérieure qui entraîne la ruine de l'enveloppe.

Lorsque l'enveloppe est épaisse, la pression p_1 est nettement plus grande que la pression p_0 ; par **exemple**, si $b = 2a$, on trouve $p_0 = 0,583 K$ et $p_1 = 1,386 K$.

La figure 15 donne l'allure des courbes représentatives de σ_r et σ_θ .

Calculons maintenant le déplacement radial $U(r)$ dans la zone plastique ; supposons le déplacement infiniment petit ; les **dilatations principales** sont :

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r}$$

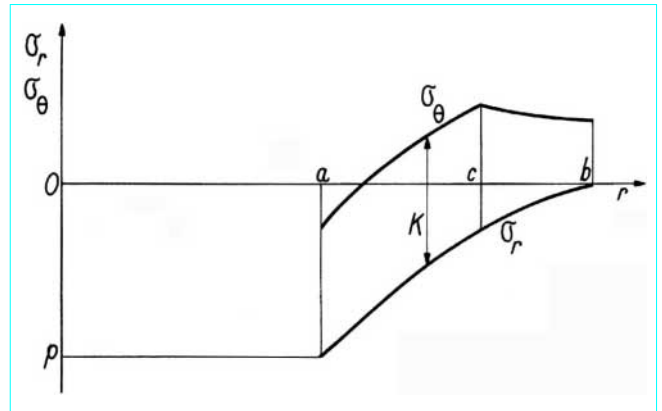


Figure 15 – Courbes représentatives de σ_r et σ_θ dans le cas d'une enveloppe sphérique soumise à une pression intérieure

Puisque la déformation plastique s'effectue sans changement de volume, la dilatation cubique $\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta$ obéit, dans la zone plastique, aux lois de l'élasticité ; nous avons donc :

$$\frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_r + 2\sigma_\theta)$$

soit, compte tenu des valeurs de σ_r et de σ_θ dans la zone plastique et de la formule (50) :

$$\frac{dU}{dr} + \frac{2U}{r} = 2K \frac{1-2\nu}{E} \left(3 \ln \frac{r}{c} + \frac{c^3}{b^3} \right)$$

Cette équation différentielle a pour intégrale générale :

$$U(r) = 2K \frac{1-2\nu}{E} \left[r \ln \frac{r}{c} - \frac{1}{3} r \left(1 - \frac{c^3}{b^3} \right) \right] + \frac{D}{r^2}$$

La constante d'intégration D se détermine en écrivant que $U(r)$ est continu pour $r = c$; nous devons donc avoir, en utilisant la formule (49) :

$$U(c) = \delta_0 c = \frac{Kc}{3E} \left[(1+\nu) + 2(1-2\nu) \frac{c^3}{b^3} \right]$$

et la constante D a pour valeur :

$$D = \frac{K}{E} (1-\nu) c^3$$

En prenant $c = b$ et $r = a$ dans l'expression de $U(r)$, nous trouvons l'augmentation $\delta_1 a$ du rayon intérieur au moment où l'enveloppe est entièrement plastifiée :

$$\delta_1 a = \frac{Ka}{E} \left[(1-\nu) \frac{b^3}{a^3} - 2(1-2\nu) \ln \frac{b}{a} \right]$$

Faisons croître la pression de zéro jusqu'à p_1 et portons en abscisse l'augmentation $U(a)$ du rayon intérieur et en ordonnée la pression p , nous obtenons une courbe ayant la forme représentée sur la figure 16 ; la figure a été tracée pour $b = 2a$ et $\nu = 0,25$; on a alors $\delta_0 a = 0,458 Ka/E$ et $\delta_1 a = 5,307 Ka/E$.

Les résultats précédents ne sont valables que lorsque les déplacements restent petits, ce qui implique que $\frac{K}{E} \left(\frac{b}{a} \right)^3$ soit petit. Une étude plus complète montre que, si cette condition n'est pas réalisée, la pression passe par un maximum avant la plastification complète de l'enveloppe.

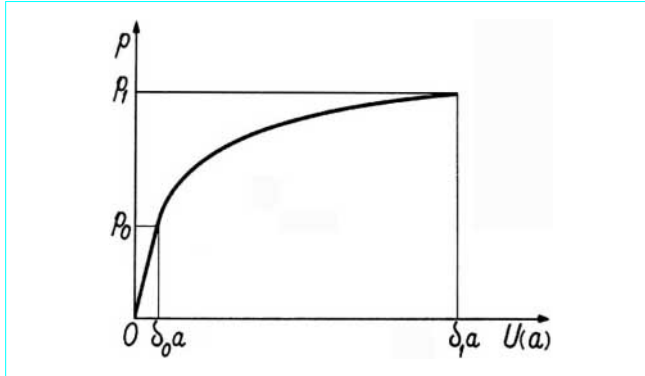


Figure 16 – Pression dans une enveloppe sphérique en fonction de l'accroissement du rayon intérieur

6.2.2 Tube cylindrique soumis à une pression intérieure

Désignons par a le rayon intérieur, par b le rayon extérieur et par p la pression sur la paroi intérieure du tube. Les **contraintes principales** sont $\sigma_I = \sigma_r$ dirigée suivant le rayon, $\sigma_{II} = \sigma_\theta$ normale au plan diamétral et $\sigma_{III} = \sigma_z$ parallèle à l'axe du tube. La déformation étant plane, les critères de Von Mises et de Tresca sont identiques : le diamètre $2p$ du cercle de Mohr doit être inférieur à une constante caractéristique K .

Dans le cas où l'équilibre est élastique, les contraintes sont données par les **formules de Lamé** (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans ce traité) :

$$\sigma_r = -p \frac{a^2(b^2 - r^2)}{r^2(b^2 - a^2)}, \quad \sigma_\theta = p \frac{a^2(b^2 + r^2)}{r^2(b^2 - a^2)} \quad (52)$$

La déformation étant plane, la contrainte principale $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$ est la contrainte principale intermédiaire ; le diamètre $2p$ du cercle de Mohr a donc pour valeur :

$$2p = \sigma_\theta - \sigma_r = p \frac{2a^2b^2}{r^2(b^2 - a^2)}$$

La limite d'élasticité est atteinte en premier lieu sur la surface intérieure ; la solution (52) reste valable tant que la pression p est inférieure à p_0 :

$$p_0 = \frac{1}{2} K \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (53)$$

Lorsque p est plus grand que p_0 et plus petit que la valeur p_1 qui correspond à la *plastification totale du tube*, il existe dans le tube une zone en *équilibre plastique* ($a \leq r \leq c$) et une zone en *équilibre élastique* ($c \leq r \leq b$) séparées par un cylindre de rayon c . Dans la zone en équilibre plastique, $\sigma_z = 1/2(\sigma_r + \sigma_\theta)$ est la contrainte principale intermédiaire ($\nu = 1/2$ dans cette zone, puisque la déformation plastique s'effectue sans changement de volume) ; σ_r et σ_θ vérifient donc le critère de plasticité et l'équation d'équilibre :

$$\sigma_\theta - \sigma_r = K, \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

Il en résulte que σ_r est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{K}{r}$$

qui prend la valeur $-p$ pour $r = a$. Nous obtenons ainsi les valeurs des contraintes dans la zone en équilibre plastique :

$$\sigma_r = -p + K \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + K, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

Exprimons que σ_r est contenu pour $r = c$; nous trouvons, en utilisant la formule (53) pour la zone élastique ($c \leq r \leq b$) où la limite d'élasticité est atteinte pour $r = c$:

$$-p + K \ln \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} K \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right)$$

La valeur de la pression intérieure en fonction de c est donc :

$$p = K \ln \frac{c}{a} + \frac{1}{2} K \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \quad (54)$$

Comme :

$$\frac{dp}{dc} = \frac{K}{c} \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right)$$

est toujours positif, la pression p croît constamment, lorsque c varie de a à b , depuis la valeur p_0 donnée par la formule (53) jusqu'à la valeur limite :

$$p_1 = K \ln \frac{b}{a} \quad (55)$$

qui correspond à la plastification totale du tube.

Dans le cas d'un tube épais, la pression p_1 est nettement plus grande que la pression p_0 ; par **exemple**, si $b = 2a$, on trouve $p_0 = 0,375 K$ et $p_1 = 0,693 K$.

Calculons le déplacement radial $U(r)$. Dans le cas de l'équilibre élastique, nous avons, la déformation étant plane :

$$\epsilon_\theta = \frac{U}{r} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r]$$

d'où, compte tenu des expressions (52) de σ_r et σ_θ :

$$U(r) = p \frac{(1+\nu)a^2b^2}{E(b^2-a^2)} \left[\frac{1}{r} + (1-2\nu)\frac{r}{b^2} \right]$$

En faisant $r = a$ et $p = p_0$ dans la formule précédente, nous trouvons l'augmentation du rayon intérieur du tube au moment où la limite d'élasticité est atteinte sur la surface intérieure :

$$\delta_0 a = \frac{Ka(1+\nu)}{2E} \left[1 + (1-2\nu)\frac{a^2}{b^2} \right] \quad (56)$$

Dans la zone en équilibre plastique ($a \leq r \leq c$), la déformation plastique s'effectue sans changement de volume ; la dilatation cubique $\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r}$ obéit donc aux lois de l'élasticité, et nous avons :

$$\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)$$

soit, compte tenu des valeurs de σ_r , σ_θ et σ_z dans la zone plastique et de la formule (54) :

$$\frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} = \frac{3}{2} K \frac{1-2\nu}{E} \left(2 \ln \frac{r}{c} + \frac{c^2}{b^2} \right)$$

Cette équation différentielle a pour intégrale générale :

$$U(r) = \frac{3}{2} K \frac{1-2\nu}{E} \left[r \ln \frac{r}{c} - \frac{1}{2} r \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) \right] + \frac{D}{r}$$

La constante d'intégration D se détermine en écrivant que $U(r)$ est continu pour $r = c$; nous devons donc avoir, en utilisant la formule (56) :

$$U(c) = \delta_0 c = \frac{Kc(1+\nu)}{E} \left[1 + (1-2\nu)\frac{c^2}{b^2} \right]$$

et la constante D a pour valeur :

$$D = \frac{Kc^2}{4E} \left[(5-4\nu) - (1-2\nu)^2 \frac{c^2}{b^2} \right]$$

En prenant $c = b$ et $r = a$ dans l'expression de $U(r)$, nous trouvons l'augmentation $\delta_1 a$ du rayon intérieur au moment où le tube est entièrement plastifié :

$$\delta_1 a = \frac{Ka}{E} \left[(1-\nu^2) \frac{b^2}{a^2} - \frac{3}{2} (1-2\nu) \ln \frac{b}{a} \right]$$

En supposant $b = 2a$ et $\nu = 0,25$, on trouve $\delta_0 a = 0,781 Ka/E$ et $\delta_1 a = 3,230 Ka/E$.

Les résultats précédents ne sont valables que lorsque les déplacements restent petits, ce qui implique que $\frac{K(b/a)^2}{E}$ soit petit.

Remarque : il est possible de résoudre formellement les deux problèmes précédents en adoptant le critère de plasticité (42).

6.2.3 Anneau circulaire mince soumis à une pression intérieure

Ce problème ne diffère du problème du tube que parce que la *contrainte est plane*. Soient a le rayon intérieur, b le rayon extérieur et p la pression qui s'exerce le long du cercle $r = a$. Les **contraintes principales** sont $\sigma_I = \sigma_r$ dirigée suivant le rayon, $\sigma_{II} = \sigma_\theta$ normale au rayon et $\sigma_{III} = 0$ normale au plan de l'anneau.

Les critères de Tresca et de Von Mises sont différents.

6.2.3.1 Critère de Tresca

Lorsqu'il y a déformation plastique, les contraintes principales σ_r et σ_θ vérifient au moins l'une des relations :

$$|\sigma_r - \sigma_\theta| - K = 0, \quad |\sigma_r| - K = 0, \quad |\sigma_\theta| - K = 0$$

Dans le cas où l'anneau est en équilibre élastique, les contraintes σ_r et σ_θ sont encore données par les formules (52), et la pression limite élastique a toujours la valeur p_0 donnée par la formule (53).

Lorsque p dépasse p_0 , la plastification commence à partir du bord intérieur $r = a$. Au début de la plastification, $\sigma_z = 0$ est la contrainte principale intermédiaire, puisque $\sigma_r < 0$ et $\sigma_\theta > 0$. Dans la zone en déformation plastique, les contraintes σ_r et σ_θ vérifient donc les équations :

$$\sigma_\theta - \sigma_r = K, \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

Nous en déduisons les valeurs des contraintes :

$$\sigma_r = -p + K \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\theta = \sigma_r + K, \quad \sigma_z = 0$$

Cette solution convient tant que σ_z est la contrainte principale intermédiaire ; il faut pour cela que l'on ait dans toute la zone plastifiée $\sigma_r \leq 0$ et $\sigma_\theta \geq 0$, soit, compte tenu de la valeur de σ_θ :

$$-K \leq \sigma_r \leq 0$$

Il en est bien ainsi si la plus petite valeur de σ_r , obtenue pour $r = a$, est supérieure ou égale à $-K$, et si la plus grande valeur de σ_r , obtenue sur le cercle $r = c$ qui limite la zone plastifiée, est négative ou nulle ; nous obtenons ainsi les inégalités :

$$K \ln \frac{c}{a} \leq p \leq K$$

qui ne sont compatibles que si $c \leq ea$ ($e = 2,718$ est la base des logarithmes népériens) ; la zone plastifiée ne peut donc s'étendre au-delà du cercle de rayon ea ; la pression limite p_1 a pour valeur :

$$p_1 = \begin{cases} K \ln \frac{b}{a} & \text{lorsque } b < ea \\ K & \text{lorsque } b \geq ea \end{cases} \quad (57)$$

6.2.3.2 Critère de Von Mises

Lorsqu'il y a déformation plastique, les contraintes principales σ_r et σ_θ vérifient le critère de plasticité (37) dans lequel $2a = K$:

$$4(\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2) - 3K^2 = 0$$

et l'équation d'équilibre :

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

En écrivant le critère de plasticité sous la forme :

$$3(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r + \sigma_\theta)^2 = 3K^2$$

nous pouvons, en posant :

$$\sigma_r + \sigma_\theta = -K\sqrt{3} \sin \varphi, \quad \sigma_r - \sigma_\theta = -K \cos \varphi$$

exprimer σ_r et σ_θ en fonction d'un seul paramètre φ :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -K \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi \right) = -K \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \\ \sigma_\theta &= -K \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi \right) = -K \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

Pour $r = b$, la contrainte σ_r est nulle, donc $\varphi = -\pi/6$.

En reportant les valeurs de σ_r et σ_θ dans l'équation d'équilibre, nous obtenons l'équation différentielle :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r} \cos \varphi = 0$$

Cette équation est à variables séparées ; son intégrale, qui prend la valeur $r = b$ pour $\varphi = -\pi/6$, est donnée par la formule :

$$r^2 \cos \varphi = \frac{b^2 \sqrt{3}}{2} \exp \left[-\sqrt{3} \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

Pour $r = a$, φ prend la valeur φ_0 racine de l'équation :

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi_0 \exp \left[\sqrt{3} \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \left(\frac{b}{a} \right)^2$$

et la pression limite p_1 qui correspond à la plastification complète de l'anneau a pour valeur :

$$p_1 = K \sin \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{6} \right)$$

Une discussion plus complète montre que φ_0 ne peut dépasser la valeur $\pi/3$. L'angle φ décroît donc de φ_0 à $-\pi/6$ lorsque r croît de a à b . La valeur $\varphi_0 = \pi/3$ correspond au maximum possible de la pression limite :

$$p_1 = K$$

et au maximum k du rapport b/a :

$$k = \left(\frac{b}{a} \right)_{\max} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \exp \left(\frac{\pi \sqrt{3}}{2} \right) \right]^{1/2} \approx 2,963$$

En résumé, la pression limite a pour expression :

$$p_1 = \begin{cases} K \sin \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{6} \right) & \text{lorsque } b < ka \\ K & \text{lorsque } b \geq ka \end{cases} \quad (58)$$

La solution diffère peu de celle trouvée avec le critère de Tresca (§ 6.2.3.1).

Remarque : les résultats obtenus en déformation plane pour le tube et en contrainte plane pour l'anneau sont bien différents. La raison en est la suivante : dans le cas de l'anneau, la déformation plastique n'est pas empêchée dans la direction normale au plan de l'anneau.

7. Lignes de glissement en déformation plane

Bornons-nous au cas où le critère de plasticité (§ 5.2.2) correspond à une courbe intrinsèque composée de deux droites parallèles (semi-liquides).

En supposant qu'il n'y ait pas de densité volumique de force, les composantes $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$ et $\tau_3 = \sigma_{12} = \sigma_{21}$ du tenseur contrainte vérifient en tout point du milieu les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} = 0$$

et, puisque le milieu est supposé en équilibre plastique, la condition de plasticité.

En un point M du milieu, le cercle de Mohr (figure 17) a un rayon constant ρ . Sur le cercle de Mohr, le point $C(\sigma_1, \tau_3)$ correspond à l'élément dont la normale Mx' est parallèle à Ox , le point $D(\sigma_2, -\tau_3)$ correspond à l'élément dont la normale My' est parallèle à Oy , les points A et B correspondent aux directions principales MX et MY , le point U correspond à la normale Mn_1 à la première ligne de glissement (U) et le point V correspond à la normale Mn_2 à la deuxième ligne de glissement (V). Nous désignerons par \vec{t}_1 et \vec{n}_1 les vecteurs unité tangent et normal à (U), et par \vec{t}_2 et \vec{n}_2 les

vecteurs unité tangent et normal à (V) ; les lignes de glissement étant orthogonales, nous avons :

$$\vec{n}_1 = \vec{t}_2, \quad \vec{n}_2 = -\vec{t}_1$$

Nous pouvons exprimer σ_1 , σ_2 et τ_3 en fonction de l'abscisse ξ du centre I du cercle de Mohr et de l'angle $\theta = (Mx', Mn_1)$ qui définit l'orientation des tangentes aux lignes de glissement au point M . Nous avons, le point figuratif sur le cercle de Mohr tournant en sens inverse de la normale à l'élément :

$$\xi = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), \quad 2\theta = (\overrightarrow{IU}, \overrightarrow{IC})$$

Nous voyons alors immédiatement sur la figure 17 que :

$$\sigma_1 = \xi + \rho \sin 2\theta, \quad \sigma_2 = \xi - \rho \sin 2\theta, \quad \tau_3 = -\rho \cos 2\theta \quad (59)$$

Les contraintes principales dirigées suivant MX et MY bissectrices de l'angle (Mt_1, Mt_2) ont pour valeurs $\xi + \rho$ et $\xi - \rho$; les composantes de la contrainte sur les éléments Mt_1 et Mt_2 sont $(\xi, -\rho)$ et (ξ, ρ) .

Portons les expressions (59) dans les équations d'équilibre ; nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin 2\theta \right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = -2\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos 2\theta \right) \end{cases}$$

Introduisons, pour simplifier l'écriture, la fonction z définie par :

$$z = \frac{\xi}{2\rho} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4\rho}$$

nous trouvons que z et θ vérifient les équations aux dérivées partielles :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta \\ \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta &= -\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Désignons par :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (61)$$

les équations du **réseau des lignes de glissement**.

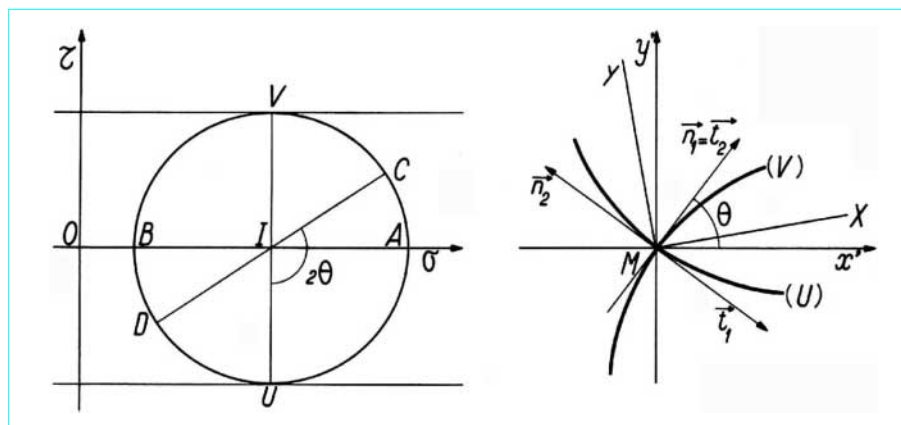


Figure 17 – Lignes de glissement

Si l'on fixe v et que u varie seul, le point $M(x, y)$ décrit une ligne (U) de la première famille, donc :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\lambda \cos \theta$$

puisque le vecteur \vec{t}_1 a pour composantes $(\sin \theta, -\cos \theta)$; λ est une fonction de u et de v qu'il est inutile de préciser.

Si l'on fixe u et que v varie seul, le point M décrit une ligne (V) de la deuxième famille, donc :

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \mu \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \mu \sin \theta$$

puisque le vecteur \vec{t}_2 a pour composantes $(\cos \theta, \sin \theta)$; μ est une fonction de u et de v qu'il est inutile de préciser.

Le changement de variables (61) transforme z et θ en fonctions de u et de v dont les dérivées premières ont pour valeurs :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \lambda \left(\frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta \right) \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \mu \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta \right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \mu \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \right) \end{cases}$$

Le changement de variables (61) transforme donc les équations (60) en les équations très simples :

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = -\frac{\partial z}{\partial v}$$

Donc, $f(u)$ et $g(v)$ désignant deux fonctions arbitraires, nous avons :

$$\theta - z = 2g(v), \quad \theta + z = 2f(u)$$

Nous obtenons ainsi la solution :

$$\theta(u, v) = f(u) + g(v), \quad z(u, v) = f(u) - g(v) \quad (62)$$

qui conduit à des propriétés remarquables des lignes de glissement découvertes par Hencky.

Soient (figure 18) A_1 et A_2 les points où une ligne variable (U) de la première famille coupe deux lignes fixes (V_1) et (V_2) de la deuxième famille définies par les valeurs u_1 et u_2 . L'angle φ des tangentes à la ligne (U) en A_1 et A_2 a pour valeur :

$$\varphi = \theta(u_2, v) - \theta(u_1, v) = f(u_2) - f(u_1)$$

donc l'angle φ garde la même valeur quelle que soit la ligne (U).

De même, soient B_1 et B_2 les points où une ligne variable (V) de la deuxième famille coupe deux lignes fixes (U_1) et (U_2) de la première famille définies par les valeurs v_1 et v_2 . L'angle ψ des tangentes à la ligne (V) en B_1 et B_2 a pour valeur :

$$\psi = \theta(u, v_2) - \theta(u, v_1) = g(v_2) - g(v_1)$$

donc l'angle ψ garde la même valeur quelle que soit la ligne (V).

Nous déduisons alors de la seconde équation (62) les relations :

$$\begin{cases} z(u_2, v) - z(u_1, v) = f(u_2) - f(u_1) = \varphi \\ z(u, v_2) - z(u, v_1) = g(v_2) - g(v_1) = -\psi \end{cases}$$

qui traduisent le **théorème de Hencky** :

Lorsqu'on se déplace le long d'une ligne de glissement et que la tangente à cette ligne tourne d'un angle ω , la contrainte normale qui s'exerce sur l'élément tangent à cette ligne varie de $\pm 2\rho\omega$; il en est de même des contraintes principales.

En effet, les contraintes dont il est question dans l'énoncé du théorème de Hencky ont pour valeurs $\xi = 2\rho z$, $\sigma_I = 2\rho z + \rho$, $\sigma_{II} = 2\rho z - \rho$.

Signalons quelques réseaux de lignes de glissement que l'on rencontre dans les applications :

- réseau de droites orthogonales (matière pressée entre deux plateaux sans frottement) ;
- droites concourantes et cercles concentriques (secteur ou éventail plastique) ;
- spirales logarithmiques coupant les droites issues d'un même point sous l'angle $\pm \pi/4$ (tube soumis à une pression intérieure) ;
- réseau de cycloïdes orthogonales (matière pressée entre deux plateaux rugueux).

Le théorème de Hencky permet le calcul des contraintes à partir des lignes de glissement. Soit, par exemple, un demi-espace chargé sur une largeur a par une densité de charge constante p (figure 19). Dans les triangles $AA'B$, ACD et $A'C'D'$, les lignes de glissement sont des droites coupant la direction principale $D'A'D$ sous l'angle $\pm \pi/4$. Ces triangles sont raccordés par deux secteurs plastiques ABC et $A'BC'$; les lignes de glissement sont les droites issues de A (ou de A') et les cercles de centre A (ou A'). Sur AD la contrainte normale est nulle, et sur AC la contrainte normale est égale à $-\rho$, puisque dans le triangle ACD le cercle de Mohr (figure 17) est tangent en O à $O\tau$. Le théorème de Hencky donne la contrainte normale sur AB égale à :

$$-\rho - 2\rho \frac{\pi}{2} = -\rho(1 + \pi) = \xi$$

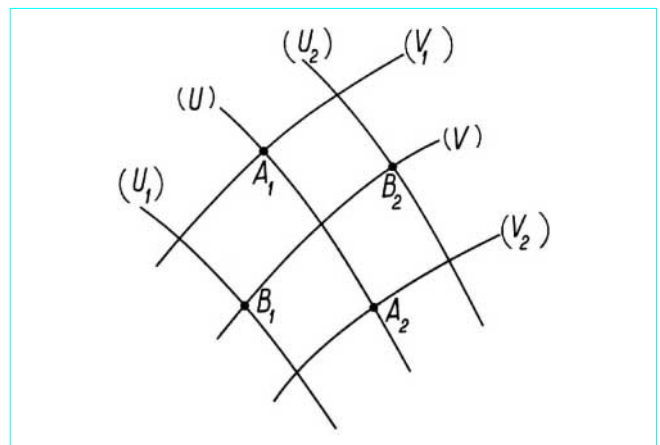


Figure 18 – Réseau de lignes de glissement

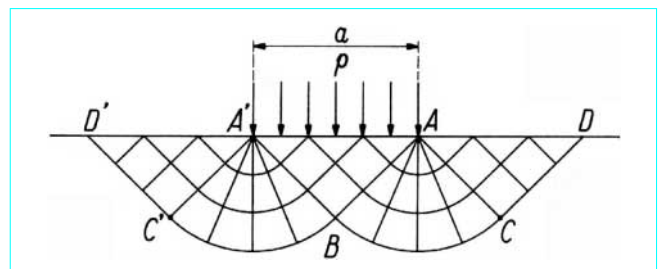


Figure 19 – Lignes de glissement d'un demi-espace chargé

Enfin, la contrainte normale sur AA' , qui est principale, a pour valeur $\xi - p$ et doit être égale à $-p$. Nous obtenons ainsi la densité de charge maximale que peut supporter le demi-espace sur AA' :

$$p = 2\rho \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

p est donc égal à la résistance à la compression simple 2ρ multipliée par le facteur $1 + \pi/2 \approx 2,57$.

8. États limites d'équilibre des structures plastiques parfaites

8.1 Définition des états limites d'équilibre

Considérons une *structure élastoplastique parfaite* (§ 2.2.1), de matrice d'élasticité L , soumise à un système de forces extérieures $\alpha \vec{F}_j$; α est un nombre sans dimension que l'on fait croître à partir de zéro. Tant que α reste inférieur à une certaine valeur α_0 , la structure est en équilibre élastique ; pour $\alpha = \alpha_0$ le critère de plasticité est vérifié en au moins un point de la structure. Si α dépasse α_0 sans être trop grand, la structure est divisée en régions où le critère de plasticité est vérifié et en régions en équilibre élastique ; dans ces dernières régions, les déformations élastiques limitées et petites empêchent que les déformations plastiques croissent indéfiniment dans les régions où le critère de plasticité est vérifié. Enfin, pour une valeur α_1 de α , les régions où le critère de plasticité est vérifié occupent un volume V_1 tel que des déformations plastiques illimitées entraînant la ruine de la structure deviennent possibles. La plus petite valeur de α , telle que les forces $\alpha \vec{F}_j$ entraînent la ruine de la structure, est la valeur α_1 ; la structure, soumise au système de forces extérieures $\alpha_1 \vec{F}_j$ est dite en **état limite d'équilibre**.

Supposons que la matrice d'élasticité L soit remplacée par ρL ; en supposant qu'on puisse négliger les déformations pour écrire les équations d'équilibre, les résultats précédents ne sont pas modifiés ; en particulier, les valeurs α_0 et α_1 sont les mêmes, seules les déformations élastiques sont multipliées par le facteur ρ . En faisant tendre ρ vers zéro, nous voyons que *l'état limite d'équilibre d'une structure élastoplastique parfaite ayant pour domaine d'élasticité (\mathcal{E}) peut être déterminé en supposant que la structure est plastique parfaite et a pour domaine de rigidité (\mathcal{R})*.

Il ne faut toutefois jamais oublier que le résultat précédent n'a été établi que moyennant l'hypothèse suivante, qu'il faut vérifier dans chaque cas particulier : *jusqu'au moment de la ruine, les déformations de la structure élastoplastique demeurent suffisamment petites pour qu'il soit justifié de négliger les déformations pour écrire les équations d'équilibre*.

8.2 Forme globale du principe du travail plastique maximal

Considérons une *structure plastique parfaite* (ou rigide-plastique, § 2.2.2) en état limite d'équilibre sous l'action de forces \vec{F}_j appliquées aux points A_j ; et tout système de forces $\alpha \vec{F}_j$ où $\alpha \geq 1$ entraîne la ruine de la structure, et tout système de forces $\beta \vec{F}_j$ où $\beta < 1$ ne donne

aucune déformation à la structure. Soit, pendant l'intervalle δt qui suit le moment où la structure commence à se déformer, $\delta \vec{q}$ la déformation éventuelle en un point, $\delta \vec{A}_j$ le déplacement du point A_j et \vec{Q} la contrainte en un point de la structure. Les contraintes \vec{Q} sont en équilibre avec les forces \vec{F}_j , et les déplacements $\delta \vec{A}_j$ résultent des déformations $\delta \vec{q}$; le **théorème des travaux virtuels** (article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303] dans ce traité) nous donne donc l'équation :

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \delta \vec{A}_j = \int_V \vec{Q} \cdot \delta \vec{q} \, dV$$

Appliquons aux points A_j des forces \vec{F}_j' n'entraînant aucune déformation de la structure, et soit \vec{Q}' les contraintes en équilibre avec les forces \vec{F}_j' ; en prenant le même déplacement virtuel que précédemment, le théorème des travaux virtuels nous donne l'équation :

$$\sum_j \vec{F}_j' \cdot \delta \vec{A}_j = \int_V \vec{Q}' \cdot \delta \vec{q} \, dV$$

Or \vec{Q} vérifie le critère de plasticité dans tout le volume V_1 qui se déforme au moment de la ruine, tandis que \vec{Q}' ne vérifie pas le critère de plasticité dans tout le volume V_1 (sinon les forces \vec{F}_j' donneraient un état limite d'équilibre). Nous avons donc, d'après le **principe du travail plastique maximal** (§ 3.1) :

$$\vec{Q} \cdot \delta \vec{q} \geq \vec{Q}' \cdot \delta \vec{q}$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu dans tout le volume V_1 . Nous obtenons donc *l'inégalité stricte* :

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \delta \vec{A}_j > \sum_j \vec{F}_j' \cdot \delta \vec{A}_j \quad (63)$$

qui exprime le *principe du travail plastique maximal sous la forme globale valable seulement pour les structures plastiques parfaites*.

En faisant intervenir les vitesses \vec{v}_j des points A_j définies par les relations $\delta \vec{A}_j = \vec{v}_j \delta t$, l'inégalité (63) peut encore s'écrire :

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j > \sum_j \vec{F}_j' \cdot \vec{v}_j \quad (64)$$

8.3 Théorèmes fondamentaux

Un *champ de contraintes* d'une structure est *statiquement admissible* s'il est en équilibre avec les forces extérieures appliquées, et il est *stable* si en tout point de la structure le point figuratif de la contrainte appartient au domaine d'élasticité (ou de rigidité) (\mathcal{E}).

Premier théorème fondamental : il ne peut pas y avoir déformation d'une structure plastique parfaite soumise à des forces extérieures pour lesquelles on peut trouver un champ de contraintes stable et statiquement admissible.

Ce théorème se démontre par l'absurde. Désignons par \vec{F}_j les forces extérieures. Si le théorème était inexact, il existerait un

nombre $\rho \leq 1$ tel que les forces $\rho \vec{F}_j$ entraîneraient un état limite d'équilibre ; nous aurions alors, d'après l'inégalité stricte (64) :

$$\sum_j \rho \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j > \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j$$

et par suite $\rho > 1$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction, ce qui démontre le théorème.

Un champ de vitesses de déplacement d'une structure est *cinématiquement admissible* s'il respecte la continuité de la structure, et il est *instable* si la puissance des forces extérieures (forces données et réactions) est supérieure ou égale à l'intégrale de la puissance

de dissipation spécifique $\mathcal{D}(\vec{q})$ (§ 3.1) :

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j \geq \int_V \mathcal{D}(\vec{q}) dV \quad (65)$$

Deuxième théorème fondamental : il y a nécessairement déformation d'une structure plastique parfaite soumise à des forces extérieures pour lesquelles on peut trouver un champ de vitesses de déplacement instable et cinématiquement admissible.

Ce théorème se démontre également par l'absurde. Soit \vec{F}_j les forces extérieures, et supposons l'inégalité (65) vérifiée pour un champ de vitesses de déplacement donnant les vitesses de déplacement \vec{v}_j et les vitesses de déformation \vec{q} . Si le théorème était

inexact, la structure ne subirait pas de déformation, et les forces \vec{F}_j

seraient en équilibre avec des contraintes \vec{Q} ne vérifiant pas en tout point le critère de plasticité ; le théorème des travaux virtuels (§ 8.2) nous donnerait alors l'équation :

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j = \int_V \vec{Q} \cdot \vec{q} dV$$

et puisque, d'après le principe du travail plastique maximal :

$$\vec{Q} \cdot \vec{q} \leq \mathcal{D}(\vec{q})$$

l'égalité ne pouvant avoir lieu en tout point de la structure, nous aurions l'inégalité stricte :

$$\sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j < \int_V \mathcal{D}(\vec{q}) dV$$

en contradiction avec l'hypothèse (65), ce qui démontre le théorème.

8.4 Application des théorèmes fondamentaux

Supposons qu'un système de forces $\alpha \vec{F}_j$ soit appliqué à une structure plastique parfaite, et soit α_0 la valeur du paramètre α qui correspond à l'état limite d'équilibre. Le premier théorème fondamental permet de déterminer des valeurs α_1 et le second théorème fondamental des valeurs α_2 telles que :

$$\alpha_1 \leq \alpha_0 \leq \alpha_2$$

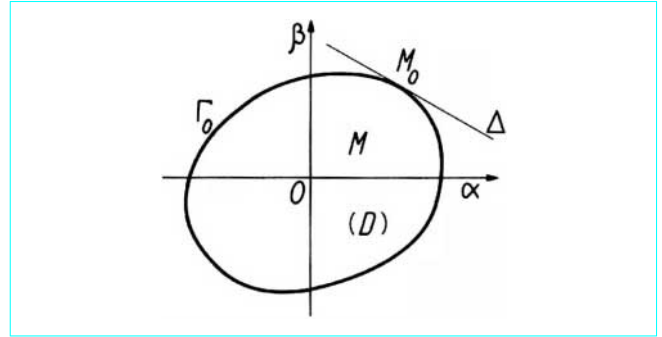


Figure 20 – Domaine d'équilibre d'une structure plastique parfaite

Plus généralement, supposons que le système des forces appliquées à la structure soit de la forme $\alpha \vec{F}_j + \beta \vec{G}_k$. Lorsque l'état d'équilibre est limite, le point M_0 de coordonnées (α_0, β_0) se trouve sur une certaine courbe fermée Γ_0 limitant un domaine intérieur ouvert (D) ; tout point intérieur à (D) correspond à un système de forces donnant un équilibre possible, et tout point extérieur à Γ_0 correspond à un système de forces entraînant la ruine (figure 20).

Il est aisé de montrer que le domaine (D) est convexe ; en effet, $M_0(\alpha_0, \beta_0)$ désignant un point quelconque de Γ_0 et $M(\alpha, \beta)$ un point quelconque de (D) , nous avons, d'après la formule (64) :

$$\sum_j \alpha_0 \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j + \sum_k \beta_0 \vec{G}_k \cdot \vec{w}_k > \sum_j \alpha \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j + \sum_k \beta \vec{G}_k \cdot \vec{w}_k$$

\vec{v}_j et \vec{w}_k étant les vitesses des points d'application des forces \vec{F}_j

et \vec{G}_k dans la déformation de l'état limite $M_0(\alpha_0, \beta_0)$. Il en résulte que le domaine (D) est convexe, puisque l'inégalité précédente signifie que le domaine (D) se trouve tout entier d'un même côté d'une droite Δ passant par M_0 , d'équation :

$$(\alpha - \alpha_0) \sum_j \vec{F}_j \cdot \vec{v}_j + (\beta - \beta_0) \sum_k \vec{G}_k \cdot \vec{w}_k = 0$$

Le premier théorème fondamental permet de déterminer des courbes Γ_1 intérieures à Γ_0 , et le deuxième théorème fondamental des courbes Γ_2 extérieures à Γ_0 . Il est donc possible de trouver une couronne comprise entre deux courbes Γ_1 et Γ_2 , qui peuvent être très voisines, à l'intérieur de laquelle est tracée la courbe Γ_0 inconnue.

Il est possible de déduire des théorèmes fondamentaux des méthodes pratiques de calcul des charges limites des structures usuelles (article *Plasticité appliquée au calcul des structures* [C 2 050] dans le traité Construction).

9. Théorème fondamental de l'adaptation

La considération des états limites d'équilibre d'une structure ne suffit pas pour justifier sa sécurité lorsque la structure est soumise à un système de forces $\Phi(t)$ variable dans le temps. En effet, lorsque la sollicitation varie, des déformations plastiques indéfiniment répétées peuvent se produire ; de tels cumuls ou alternances de déformations plastiques entraînent inévitablement la ruine de la structure à plus ou moins brève échéance.

Le **théorème fondamental de l'adaptation** précise les conditions dans lesquelles la structure reste indéfiniment stable ; il s'énonce :

Soit $Q'(t)$ la contrainte dans une structure soumise à une sollicitation variable $\Phi(t)$ calculée dans l'hypothèse du comportement élastique. S'il existe un état d'autocontrainte d'adaptation fixe Q^A tel que le point représentatif de la contrainte résultante $Q'(t) + Q^A$ appartienne toujours au domaine d'élasticité (\mathcal{E}) , la structure reste indéfiniment stable.

Dans l'hypothèse du comportement élastique, la déformation serait :

$$q'(t) = L Q'(t) \quad (66)$$

L désignant la matrice d'élasticité de la structure.

La contrainte réelle est $Q(t)$, et puisque la structure peut avoir subi dans le passé des déformations plastiques $q''(t)$, la déformation réelle est :

$$q(t) = L Q(t) + q''(t) \quad (67)$$

À l'instant t , l'état d'autocontrainte $Q^R(t)$ est celui que l'on obtient en supposant la décharge élastique ; c'est donc l'état d'autocontrainte :

$$Q^R(t) = Q(t) - Q'(t) \quad (68)$$

Nous allons montrer que la quantité scalaire *positive* :

$$J = \frac{1}{2} \int_V [Q^R(t) - Q^A]^t L [Q^R(t) - Q^A] dV \quad (69)$$

l'intégrale étant étendue au volume de la structure, ne peut que diminuer lorsque la sollicitation varie en entraînant des déformations plastiques.

Une variation des forces extérieures entraîne une variation δJ égale à :

$$\delta J = \int_V [Q^R(t) - Q^A]^t L \delta Q^R(t) dV$$

soit, compte tenu de la relation (68) :

$$\delta J = \int_V [Q - (Q' + Q^A)]^t L (\delta Q - \delta Q') dV$$

Mais nous avons, en vertu des relations (66) et (67) :

$$L \delta Q' = \delta q', \quad L \delta Q = \delta q - \delta q''$$

de sorte que nous pouvons écrire δJ sous la forme :

$$\delta J = \int_V [Q - (Q' + Q^A)]^t (\delta q - \delta q' - \delta q'') dV$$

Les contraintes $Q(t)$ et $Q'(t)$ sont statiquement admissibles avec les forces extérieures $\Phi(t)$; il en résulte que $Q - (Q' + Q^A)$ est un état d'autocontrainte.

Les déformations δq et $\delta q'$ étant cinématiquement admissibles, le théorème des travaux virtuels (article *Contraintes et déformations dans un milieu continu* [A 303] dans ce traité) montre que :

$$\int_V [Q - (Q' + Q^A)]^t \delta q dV = 0$$

$$\int_V [Q - (Q' + Q^A)]^t \delta q' dV = 0$$

Nous obtenons donc finalement l'expression suivante de δJ :

$$\delta J = - \int_V [Q - (Q' + Q^A)]^t \delta q'' dV \quad (70)$$

Lorsque le point figuratif de la contrainte Q appartient à (\mathcal{E}) , la variation de déformation plastique $\delta q''$ est nulle, donc $\delta J = 0$.

Lorsque le point figuratif de la contrainte Q vient en un point A de la frontière du domaine (\mathcal{E}) , le vecteur déformation plastique $\delta q''$ est normal à la frontière (figure 21).

En vertu de l'hypothèse faite dans le théorème de l'adaptation, le point figuratif B de la contrainte $Q' + Q^A$ appartient à (\mathcal{E}) ; donc le produit scalaire :

$$[Q - (Q' + Q^A)]^t \delta q'' = \overrightarrow{BA} \cdot \delta \vec{q}''$$

est toujours positif puisque le domaine d'élasticité (\mathcal{E}) est convexe.

Il en résulte que la variation δJ définie par (70) est toujours négative ou nulle ; la quantité positive J dont la valeur initiale à l'état naturel est :

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_V (Q^A)^t L Q^A dV$$

est donc non croissante et tend vers une limite J_1 positive ou nulle ; dès que cette limite est atteinte, il ne se produit plus de déformations plastiques.

La structure, qui s'est adaptée à la suite de déformations plastiques limitées, demeurera donc stable.

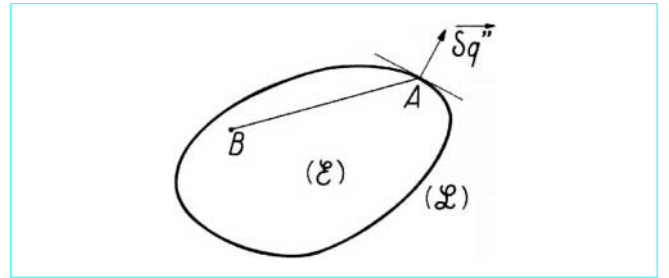


Figure 21 – Vecteur déformation plastique

Théorie de la plasticité

par **Jean COURBON**

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

Bibliographie

COLONNETTI (G.). – *L'équilibre des corps déformables*. 160 p., Dunod (1955).

PRAGER (W.). – *Mécanique des solides isotropes au-delà du domaine élastique*. 64 p., Gauthier-Villars (1937).

GEIRINGER (H.). – *Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes*. 90 p., Gauthier-Villars (1937).

NADAI (A.). – *Theory of flow and fracture of solids*. Mc Graw Hill (1950).

PRAGER (W.). – *Problèmes de plasticité théorique*. 121 p., Dunod (1958).

HILL (R.). – *The mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press (1950).

MANDEL (J.). – *Cours de mécanique des milieux continus*. 2 vol., 848 p., Gauthier-Villars (1966).

ILIOUCHINE (A.). – *Plasticité*. 374 p., Eyrolles (1956).

COURBON (J.). – *Résistance des matériaux*. Tome II, 840 p., Dunod (1971).