

Densidad de flujo eléctrico, ley de Gauss y divergencia

Después de dibujar algunos de los campos descritos en el capítulo anterior y familiarizarse con el concepto de líneas de flujo, que muestran la dirección de la fuerza sobre una carga prueba en cualquier punto, es difícil dejar de dar a estas líneas un significado físico y pensar en ellas como líneas de *flujo*. Ninguna partícula física se proyecta radialmente hacia fuera desde la carga puntual, y no existen tentáculos que se extiendan hacia fuera para atraer o repeler una desprevenida carga de prueba, pero en cuanto las líneas de flujo se dibujan sobre un papel surge un dibujo que muestra que de alguna manera “algo” está presente.

Resulta muy útil inventar un *flujo eléctrico* que fluya simétricamente desde la carga puntual y que coincida con las líneas de flujo, de manera que siempre se visualice este flujo donde quiera que haya un campo eléctrico.

Este capítulo presenta y utiliza los conceptos de flujo eléctrico y densidad de flujo eléctrico para resolver nuevamente algunos de los problemas tratados en el último capítulo. El trabajo resultará mucho más fácil ahora, debido a la extrema simetría de los problemas considerados. ■

3.1 Densidad de flujo eléctrico

Alrededor de 1837, el director de la London Royal Society, Michael Faraday, comenzó a interesarse mucho en los campos eléctricos estáticos y en el efecto de varios materiales aislantes sobre ellos. Este problema lo había preocupado durante los últimos diez años, cuando estaba completamente inmerso en los experimentos de su ahora famoso trabajo sobre la fuerza electromotriz inducida, que se estudiará en el capítulo 10. Al finalizar este trabajo había construido un par de esferas metálicas concéntricas. La exterior consistía de dos hemisferios que se podían unir firmemente. También preparó cáscaras esféricas de material aislante (o material dieléctrico, o simplemente *dieléctrico*) para que ocuparan el volumen entre las esferas concéntricas. Por lo pronto, no se utilizarán sus descubrimientos acerca de

los materiales dieléctricos porque sólo se tratarán campos en el vacío hasta el capítulo 6. En este momento se verá que los materiales que usó tendrán que clasificarse como dieléctricos ideales.

Su experimento consistió esencialmente de los siguientes pasos:

1. Con el equipo desarmado, a la esfera interior se le daba una carga positiva conocida.
2. Los hemisferios se unían rodeando la esfera cargada con cerca de 2 cm de material dieléctrico entre ellas.
3. La esfera exterior se descargaba conectándola momentáneamente a tierra.
4. La esfera exterior se separaba cuidadosamente usando instrumentos hechos de material aislante para no perturbar la carga inducida en ella, y se medía la carga negativa inducida en cada hemisferio.

Faraday descubrió que la carga total en la esfera exterior era igual en *magnitud* a la carga original positiva colocada en la esfera interior, y que esto se cumplía independientemente del material dieléctrico que separaba las dos esferas. Concluyó que había algún tipo de “desplazamiento” desde la esfera interior a la exterior y que era independiente del medio; ahora a este flujo se le conoce como *desplazamiento*, flujo de *desplazamiento*, o simplemente *flujo eléctrico*.

Los experimentos de Faraday también mostraron, desde luego, que una carga positiva mayor en el interior de la esfera inducía una correspondiente carga negativa mayor en la esfera exterior. Esto condujo a establecer la existencia de una proporcionalidad directa entre el flujo eléctrico y la carga de la esfera interior. El valor de la constante de proporcionalidad depende del sistema de unidades y resulta afortunado utilizar unidades SI, ya que así la constante es unitaria. Si el flujo eléctrico se denota por Ψ (psi) y la carga total de la esfera interior por Q , entonces, por el experimento de Faraday

$$\Psi = Q$$

de manera que el flujo eléctrico Ψ se mide en coulombs.

Es posible obtener más información cuantitativa considerando una esfera interior de radio a y una exterior de radio b , con cargas Q y $-Q$, respectivamente (figura 3.1). Las trayectorias del flujo eléctrico Ψ que se extienden desde la esfera interior a la exterior las indican las líneas de flujo dibujadas en forma radial y simétrica desde una esfera a otra.

En la superficie de la esfera interior, Ψ coulombs de flujo eléctrico los produce la carga de $Q (= \Psi)$ coulombs distribuidos uniformemente sobre una superficie que tiene un área de $4\pi a^2$ m². La densidad de flujo en esta superficie es $\Psi/4\pi a^2$, o $Q/4\pi a^2$ C/m², y ésta es una importante cantidad nueva.

A la *densidad de flujo eléctrico*, medida en coulombs por metro cuadrado (unidad algunas veces descrita como “líneas por metro cuadrado”, puesto que cada línea se debe a un coulomb), se le asigna la letra **D**, que se eligió originalmente debido a los nombres alternativos de *densidad de flujo de desplazamiento* o *densidad de desplazamiento*. La “densidad de flujo eléctrico” es un nombre más descriptivo, y por ello se usará de manera consistente.

La densidad de flujo eléctrico **D** es un campo vectorial que pertenece a la clase de campos vectoriales de “densidades de flujo” y distinta de la clase “campos de fuerza”, en la que

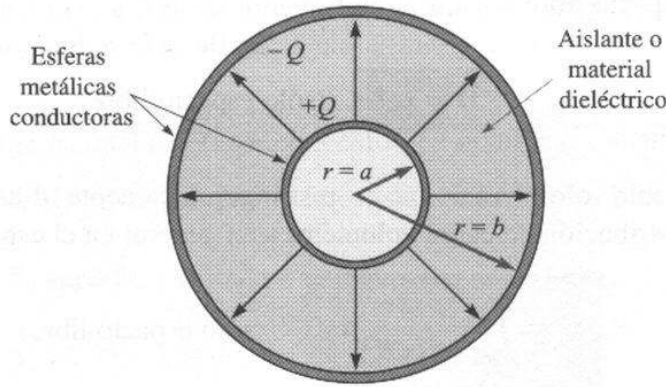


Figura 3.1 El flujo eléctrico en la región entre un par de esferas concéntricas cargadas. La dirección y magnitud de \mathbf{D} no son función del dieléctrico colocado entre las esferas.

se incluye la intensidad de campo eléctrico \mathbf{E} . La dirección de \mathbf{D} en un punto es la dirección de las líneas de flujo en ese punto, y su magnitud es igual al número de líneas de flujo que atraviesan una superficie normal a las líneas, dividida entre el área de la superficie.

Obsérvese de nuevo la figura 3.1. La densidad de flujo eléctrico está en dirección radial y tiene un valor de

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \Big|_{r=a} &= \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r && \text{(esfera interior)} \\ \mathbf{D} \Big|_{r=b} &= \frac{Q}{4\pi b^2} \mathbf{a}_r && \text{(esfera exterior)} \end{aligned}$$

y a una distancia r , donde $a \leq r \leq b$,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

Si se deja ahora que la esfera interior comience a hacerse más y más pequeña, mientras sigue reteniendo una carga Q , en el límite se convertirá en una carga puntual; no obstante, la densidad de flujo eléctrico en un punto a r metros de la carga puntual sigue siendo:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad (1)$$

para Q líneas de flujo que se dirigen simétricamente alejándose del punto y que pasan a través de una superficie esférica imaginaria de área $4\pi r^2$.

Este resultado debe compararse con la ecuación (10) de la sección 2.2, que describe la intensidad de campo eléctrico radial de una carga puntual en el espacio libre.

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

Por lo tanto, en el espacio libre,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (\text{sólo espacio libre}) \quad (2)$$

Aunque (2) es aplicable sólo al vacío, no se restringe únicamente al campo de una carga puntual. Para una distribución de carga volumétrica en general en el espacio libre

$$\mathbf{E} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \quad (\text{sólo espacio libre}) \quad (3)$$

donde esta relación se deduce a partir del campo de una sola carga puntual. De manera similar, (1) conduce a

$$\mathbf{D} = \int_{\text{vol}} \frac{\rho_v dv}{4\pi R^2} \mathbf{a}_R \quad (4)$$

y (2) es, por consiguiente, verdadera para cualquier configuración de carga en el espacio libre. La expresión (2) puede considerarse como la definición de \mathbf{D} en el espacio libre.

Como preparación para después estudiar los dieléctricos, se debe señalar ahora que para una carga puntual sumergida en un medio dieléctrico ideal infinito, los resultados de Faraday muestran que (1) sigue siendo aplicable, y lo mismo sucede con (4). La ecuación (3) no es aplicable, de modo que la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} será un poco más complicada que (2).

Puesto que \mathbf{D} es directamente proporcional a \mathbf{E} en el espacio libre, en apariencia resulta innecesario utilizar un nuevo símbolo. Sin embargo, se hará por varias razones. Primero, \mathbf{D} se asocia con el concepto de flujo, que es una idea nueva e importante. Segundo, los campos \mathbf{D} que se obtengan serán un poco más sencillos que los correspondientes campos \mathbf{E} , ya que ϵ_0 no aparecerá. Y finalmente, es útil para empezar a familiarizarse con \mathbf{D} antes de aplicarlo a materiales dieléctricos en el capítulo 6.

Considérese un sencillo ejemplo numérico para ilustrar estas cantidades y unidades nuevas.

EJEMPLO 3.1

Se desea encontrar \mathbf{D} en la región circunvecina a una carga uniforme de 8 nC/m colocada a lo largo del eje z .

Solución. El campo \mathbf{E} es

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{a}_\rho = \frac{8 \times 10^{-9}}{2\pi(8.854 \times 10^{-12})\rho} \mathbf{a}_\rho = \frac{143.8}{\rho} \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$$

En $\rho = 3 \text{ m}$, $\mathbf{E} = 47.9 \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$.

Asociado con el campo \mathbf{E} , se encuentra:

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho = \frac{8 \times 10^{-9}}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho = \frac{1.273 \times 10^{-9}}{\rho} \mathbf{a}_\rho \text{ C/m}^2$$

El valor de $\rho = 3 \text{ m}$ es $\mathbf{D} = 0.424 \mathbf{a}_\rho \text{ nC/m}$.

El flujo total que deja a 5 m de longitud de la línea de carga es igual a la carga total contenida en esa longitud, o $\Psi = 40 \text{ nC}$.

D3.1 Una carga puntual de $60 \mu\text{C}$ se localiza en el origen. Calcular el flujo eléctrico que pasa a través de: a) la porción de la esfera $r = 26 \text{ cm}$ limitada por $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$; b) la superficie cerrada $\rho = 26 \text{ cm}$ y $z = \pm 26 \text{ cm}$; c) el plano $z = 26 \text{ cm}$.

Respuesta: $7.5 \mu\text{C}$; $60 \mu\text{C}$; $30 \mu\text{C}$

D3.2 Encontrar \mathbf{D} (en coordenadas cartesianas) en $P(2, -3, 6)$ causado por: a) una carga puntual $Q_A = 55 \text{ mC}$ en $Q(-2, 3, -6)$; b) una línea de carga uniforme $\rho_{LB} = 20 \text{ mC/m}$ en el eje x ; c) una superficie cargada con una densidad uniforme $\rho_{SC} = 120 \mu\text{C/m}^2$ en el plano $z = -5 \text{ m}$.

Respuesta: $6.38\mathbf{a}_x - 9.57\mathbf{a}_y + 19.14\mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$; $-212\mathbf{a}_y + 424\mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$; $60\mathbf{a}_z \mu\text{C/m}^2$

3.2 Ley de Gauss

Los resultados de los experimentos de Faraday con las esferas concéntricas pueden resumirse en una ley experimental que establece lo siguiente: el flujo eléctrico que pasa a través de cualquier superficie esférica imaginaria situada entre las dos esferas conductoras es igual a la carga encerrada en esa superficie imaginaria. Esta carga encerrada puede estar distribuida sobre la superficie de la esfera interior, o concentrada como carga puntual en el centro de la esfera imaginaria. Sin embargo, puesto que un coulomb de flujo eléctrico lo produce un coulomb de carga, la forma del conductor inferior pudo haber sido un cubo o una llave de latón, y la carga total inducida en la esfera exterior hubiera sido la misma. Es cierto que la densidad de flujo habría cambiado su distribución simétrica anterior a alguna otra configuración desconocida, pero $+Q$ coulombs en cualquier conductor interior producirá una carga inducida de $-Q$ coulombs sobre la esfera que lo rodea. Si se sigue yendo adelante se podrían reemplazar ahora los dos hemisferios exteriores por una lata vacía de sopa, pero completamente cerrada. Q coulombs en la llave de latón producirán $\Psi = Q$ líneas de flujo eléctrico e inducirán $-Q$ coulombs sobre la lata.¹

Esta generalización del experimento de Faraday conduce al siguiente enunciado, que se conoce como *ley de Gauss*:

El flujo eléctrico que pasa a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga total encerrada por esa superficie.

La contribución de Gauss, uno de los más grandes matemáticos que el mundo ha dado, no fue, en realidad, el que haya establecido la ley que se acaba de mostrar, sino que proporcionó la forma matemática de este enunciado, la cual se obtendrá ahora.

¹ Si éste fuese un aislante perfecto, la sopa podría dejarse incluso en el envase sin que haya diferencia en los resultados.

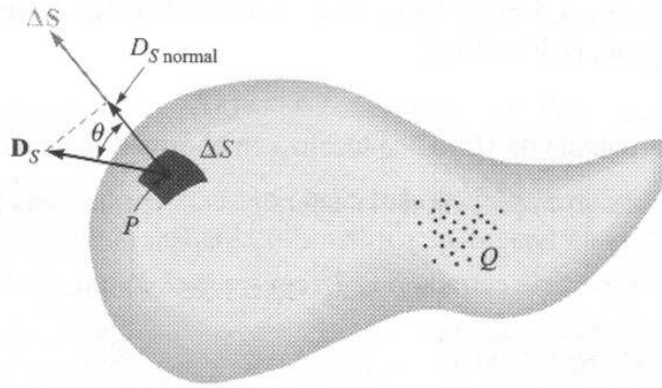


Figura 3.2 La densidad de flujo eléctrico \mathbf{D}_S en P debido a la carga Q . El flujo total que pasa a través de ΔS es $\mathbf{D}_S \cdot \Delta S$.

Supóngase una distribución de carga, que se muestra como una nube de cargas puntuales en la figura 3.2, rodeada por una superficie cerrada de cualquier forma. La superficie cerrada puede ser de la de algún material real, pero generalmente está en una superficie imaginaria cerrada que queremos visualizar. Si la carga total es Q , entonces pasarán Q coulombs de flujo eléctrico a través de la superficie cerrada. En todo punto sobre la superficie el vector densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} tendrá algún valor \mathbf{D}_S , donde el subíndice S sólo indica que el vector \mathbf{D} debe evaluarse en la superficie. En general, \mathbf{D}_S variará en magnitud y dirección de un punto a otro de la superficie.

Se debe considerar ahora la naturaleza de un pequeño elemento de superficie. Un pequeño elemento de superficie cuya área sea ΔS se parece mucho a una porción de una superficie plana; la descripción completa de este elemento de superficie requiere no sólo establecer su magnitud sino también su orientación en el espacio. En otras palabras, al pequeño elemento de superficie debe dársele un carácter vectorial. La única dirección posible que puede asociarse con ΔS es la dirección de la normal a un plano, el cual es tangente a la superficie en el punto en cuestión. Desde luego, existen dos normales, y la ambigüedad se evita escogiendo la normal hacia fuera, siempre y cuando la superficie sea cerrada y “hacia fuera” y tenga un significado específico.

Considérese, en cualquier punto P , un pequeño elemento de superficie ΔS y que \mathbf{D}_S forma un ángulo θ con ΔS , como lo muestra la figura 3.2. El flujo a través de ΔS es, entonces, el producto de la componente normal de \mathbf{D}_S y ΔS ,

$$\Delta \Psi = \text{flujo coordenado } \Delta S = D_{S,normal} \Delta S = D_S \cos \theta \Delta S = \mathbf{D}_S \cdot \Delta S$$

donde se ha aplicado la definición de producto punto, desarrollada en el capítulo 1.

El flujo *total* que pasa a través de la superficie cerrada se obtiene sumando las contribuciones diferenciales que cruzan cada elemento de superficie ΔS ,

$$\Psi = \int d\Psi = \oint_{\text{superficie cerrada}} \mathbf{D}_S \cdot dS$$

La integral resultante es una *integral de superficie cerrada*, y puesto que el elemento de superficie dS siempre implica las diferenciales de dos coordenadas, tales como dx dy ,

$\rho \, d\phi \, d\rho$ o $r^2 \, \sin \theta \, d\theta \, d\phi$, se trata de una integral doble. Normalmente se emplea sólo un símbolo de integral y se coloca debajo de él una S para indicar que la integral es de superficie; aunque en realidad esto no sería necesario puesto que la diferencial dS indica automáticamente que se trata de una integral de superficie. Una última convención es colocar un pequeño círculo sobre el mismo símbolo de integral para indicar que la integración debe hacerse sobre una superficie *cerrada*. Dicha superficie se llama con frecuencia *superficie gaussiana*. La formulación matemática de la ley de Gauss es, entonces:

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \text{carga superficial} = Q \quad (5)$$



La carga encerrada pueden componerla varias cargas puntuales, en cuyo caso

$$Q = \sum Q_n$$

o por una línea de carga

$$Q = \int \rho_L \, dL$$

o por una carga superficial,

$$Q = \int_S \rho_S \, dS \quad (\text{no necesariamente una superficie cerrada})$$

o por una distribución de carga volumétrica,

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_v \, dv$$

Por lo general se usa la última fórmula, y no es difícil ponerse de acuerdo y aceptar que representa cualquiera o todas las otras formas. Según este acuerdo, la ley de Gauss puede expresarse en términos de la distribución de carga como:

$$\oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \rho_v \, dv \quad (6)$$

Esta ecuación matemática significa simplemente que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada.

Para ilustrar la aplicación de la ley de Gauss se comprobarán los resultados del experimento de Faraday colocando una carga puntual Q en el origen de un sistema de coordenadas esféricas (figura 3.3), y se elegirá como superficie cerrada una esfera de radio a . La intensidad del campo eléctrico de la carga puntual es:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

y puesto que,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

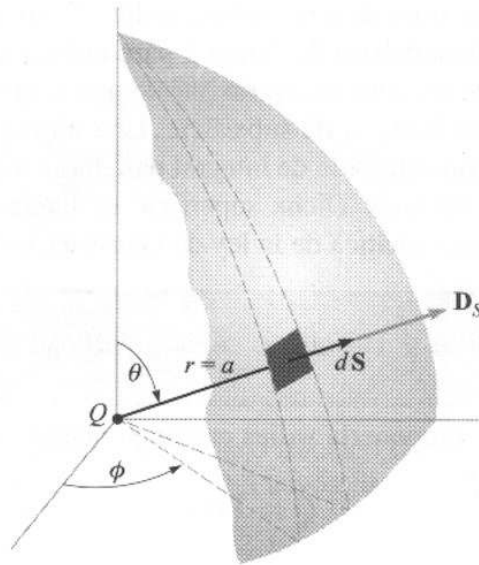


Figura 3.3 Aplicación de la ley de Gauss al campo de una carga puntual Q sobre una superficie esférica cerrada de radio a . La densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} es normal en todos los puntos de la superficie esférica y siempre tiene una magnitud constante en dichos puntos.

se tiene, como ya se sabe,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

En la superficie de la esfera,

$$\mathbf{D}_S = \frac{Q}{4\pi a^2} \mathbf{a}_r$$

En el capítulo 1 se encontró que el elemento diferencial de área sobre una superficie esférica es, en coordenadas esféricas,

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi = a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

o

$$d\mathbf{S} = a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r$$

El integrando es

$$\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi a^2} a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_r = \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

lo cual conduce a la integral cerrada de superficie:

$$\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{Q}{4\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

donde los límites de la integración han sido elegidos de modo que la operación se realice sobre toda la superficie de la esfera de una sola vez.² La integración nos da

$$\int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi} (-\cos \theta)_0^\pi d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{Q}{2\pi} d\phi = Q$$



obteniéndose un resultado que muestra que Q coulombs de flujo eléctrico atraviesa la superficie, tal como debe ser puesto que la carga encerrada es de Q coulombs.

La siguiente sección contiene ejemplos de la aplicación de la ley de Gauss a problemas con simetría geométrica sencilla, cuyo objetivo es encontrar la intensidad del campo eléctrico.

D3.3 Dada la densidad de flujo eléctrico, $\mathbf{D} = 0.3r^2\mathbf{a}_r$ nC/m² en el espacio libre: a) encontrar \mathbf{E} en el punto $P(r = 2, \theta = 25^\circ, \phi = 90^\circ)$; b) encontrar la carga total dentro de la esfera $r = 3$; c) encontrar el flujo eléctrico total que sale de la esfera $r = 4$.

Respuesta: 135.5a_r V/m; 305 nC; 965 nC

D3.4 Encontrar el flujo eléctrico total que sale de la superficie cúbica que forman los seis planos $x, y, z = \pm 5$ si la distribución de carga es: a) dos cargas puntuales de $0.1 \mu\text{C}$ en $(1, -2, 3)$ y $\frac{1}{7} \mu\text{C}$ en $(-1, 2, -2)$; b) una línea de carga uniforme de $\pi \mu\text{C/m}$ en $x = -2, y = 3$; c) una carga de superficie uniforme de $0.1 \mu\text{C/m}^2$ en el plano $y = 3x$.

Respuesta: 0.243 μC ; 31.4 μC ; 10.54 μC

3.3 Aplicación de la ley de Gauss: algunas distribuciones de carga simétricas

Se considerará ahora la manera de aplicar la ley de Gauss,

$$Q = \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$$

para determinar \mathbf{D}_S cuando se conoce la distribución de carga. Éste es un ejemplo de una ecuación integral en la cual la cantidad desconocida que se determinará aparece dentro de la integral.

La solución es fácil si se tiene la capacidad de elegir una superficie cerrada que satisfaga dos condiciones:

1. \mathbf{D}_S sea en cualquier punto normal o tangencial a la superficie cerrada, de modo que $\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$ se convierte en $D_S dS$ o en cero, respectivamente.
2. Sobre esta porción de la superficie cerrada para la cual $\mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S}$ no es cero, $D_S =$ constante.

² Nótese que si tanto θ como ϕ variaran en el rango desde 0 a 2π , la superficie esférica sería cubierta dos veces.

Esto permite reemplazar el producto punto con un producto de escalares D_S y dS , y llevar D_S fuera del símbolo de la integral. La integral se reduce, entonces, a $\int_S dS$, sobre esa porción de la superficie cerrada que \mathbf{D}_S atraviesa normalmente, y su valor es sólo el área de esa sección de la superficie.

Sólo el conocimiento de la simetría del problema permite elegir la superficie encerrada adecuada, y se obtiene con facilidad si se recuerda que la intensidad del campo eléctrico debida a una carga puntual positiva se dirige radialmente hacia fuera desde dicha carga.

Considérese de nuevo una carga puntual Q en el origen de un sistema de coordenadas esféricas y decídase en qué superficie cerrada adecuada se cumplen los dos requerimientos enunciados antes. La superficie en cuestión obviamente es una superficie esférica de cualquier radio r centrada en el origen. \mathbf{D}_S es normal a la superficie en todas partes; D_S tiene el mismo valor en todos los puntos sobre la superficie.

Entonces tenemos,

$$\begin{aligned} Q &= \oint_S \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\text{esf}} D_S dS \\ &= D_S \oint_{\text{esf}} dS = D_S \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= 4\pi r^2 D_S \end{aligned}$$

y de aquí,

$$D_S = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Puesto que r puede tener cualquier valor y ya que \mathbf{D}_S se dirige radialmente hacia fuera,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r \quad \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

esto coincide con los resultados del capítulo 2. El ejemplo es trivial, y se podría objetar que es necesario saber de antemano que el campo es simétrico y se dirige radialmente hacia fuera para obtener la respuesta. Esto es cierto, y la relación del inverso cuadrado queda como la única verificación obtenida a partir de la ley de Gauss. El ejemplo sirve, sin embargo, para ilustrar un método aplicable a otros problemas, incluyendo varios que son casi imposibles de resolver con la ley de Coulomb.

¿Existen algunas otras superficies que pudieran satisfacer las dos condiciones pedidas? El estudiante deberá determinar qué superficies, como un cubo o un cilindro, no reúnen los requisitos.

Como un segundo ejemplo, considérese una distribución de carga lineal uniforme ρ_L colocada a lo largo del eje z y que se extiende de $-\infty$ a $+\infty$. Primero debe tenerse un

conocimiento de la simetría del campo, y se podrá considerar completo este conocimiento cuando se conozcan las respuestas a estas dos preguntas:

1. ¿Qué coordenadas influyen en la variación del campo, o de qué variables es función \mathbf{D} ?
2. ¿Cuáles componentes de \mathbf{D} están presentes?

Se plantearon estas mismas preguntas cuando se empleó la ley de Coulomb para resolver este problema en la sección 2.5. Se encontró entonces que el conocimiento obtenido al responderlas permitía una integración mucho más simple. El problema pudo haber sido (y fue) resuelto sin ninguna consideración de la simetría, pero resultaba más difícil.

Sin embargo, al emplear la ley de Gauss, la cuestión no es utilizar la simetría para simplificar la solución, pues la aplicación de la ley de Gauss depende de la simetría, y *si no se puede demostrar que esta simetría existe, entonces no es posible recurrir a la ley de Gauss* para obtener una solución. Responder las dos preguntas anteriores se vuelve ahora “una obligación”.

A partir del estudio anterior de la línea de carga uniforme, se hace evidente que sólo la componente radial de \mathbf{D} está presente, o

$$\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$$

y esta componente está en función sólo de ρ :

$$D_\rho = f(\rho)$$

La elección de una superficie cerrada ahora es sencilla, pues una superficie cilíndrica es la única superficie para la cual D_ρ es normal en todas partes y pueden encerrarla superficies planas normales al eje z . La figura 3.4 muestra un cilindro circular cerrado recto de radio ρ que abarca desde $z = 0$ a $z = L$.

Se aplica la ley de Gauss,

$$\begin{aligned} Q &= \oint_{\text{cilindro}} \mathbf{D}_S \cdot d\mathbf{S} = D_S \int_{\text{lados}} dS + 0 \int_{\text{parte superior}} dS + 0 \int_{\text{parte inferior}} dS \\ &= D_S \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho d\phi dz = D_S 2\pi \rho L \end{aligned}$$

y se obtiene,

$$D_S = D_\rho = \frac{Q}{2\pi \rho L}$$

En términos de la densidad de carga ρ_L , la carga total encerrada es:

$$Q = \rho_L L$$

lo cual da

$$D_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi \rho}$$

o

$$E_\rho = \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon_0 \rho}$$

Al compararlo con la ecuación (20) de la sección 2.4 se muestra que se ha obtenido el resultado correcto, y con mucho menos trabajo. Una vez que se ha elegido la superficie

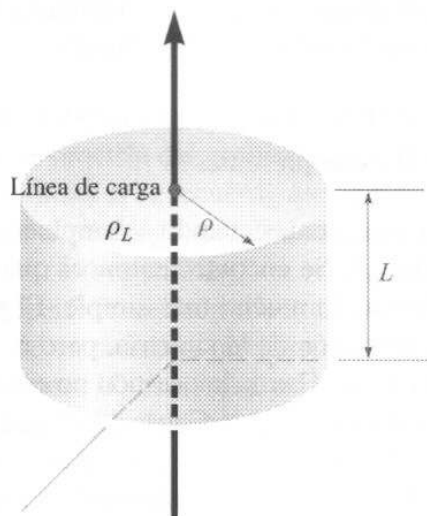


Figura 3.4 La superficie gaussiana para una línea de carga finita y uniforme es un cilindro circular recto de longitud L y radio ρ . \mathbf{D} es constante en magnitud y es perpendicular a la superficie cilíndrica en cada uno de sus puntos; \mathbf{D} es paralelo a las tapas de dicho cilindro.

apropiada, hacer la integración sólo consiste en escribir el área de la superficie en la cual \mathbf{D} es normal.

El problema de un cable coaxial es casi idéntico al de la línea de carga y es un ejemplo extremadamente difícil de resolver desde el punto de vista de la ley de Coulomb. Supóngase que se tienen dos conductores cilíndricos coaxiales, el interior de radio a y el exterior de radio b , y los dos de longitud infinita (figura 3.5). Se supondrá una distribución de carga ρ_s sobre la superficie exterior del conducto interior.

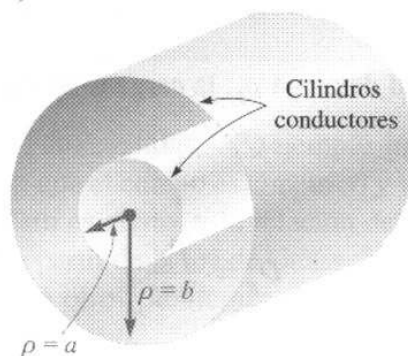


Figura 3.5 Dos conductores cilíndricos coaxiales que forman un cable coaxial proporcionan una densidad de flujo eléctrico uniforme dentro de los cilindros dada por $D_\rho = a\rho_s/\rho$.

Las consideraciones de simetría permiten observar que sólo está presente la componente D_ρ y que sólo puede estar en función de ρ . Un cilindro circular de longitud L y de radio ρ , donde $a < \rho < b$, debe elegirse necesariamente como la superficie gaussiana, y con rapidez se obtiene:

$$Q = D_S 2\pi\rho L$$

La carga total en una longitud L del conductor interior es:

$$Q = \int_{z=0}^L \int_{\phi=0}^{2\pi} \rho_S a d\phi dz = 2\pi a L \rho_S$$

de lo cual se tiene,

$$D_S = \frac{a\rho_S}{\rho} \quad \mathbf{D} = \frac{a\rho_S}{\rho} \mathbf{a}_\rho \quad (a < \rho < b)$$

Este resultado puede expresarse en términos de carga por unidad de longitud, porque el conductor interior tiene $2\pi a \rho_S$ coulombs en cada metro de longitud, y de aquí, con $\rho_L = 2\pi a \rho_S$,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\rho$$

y la solución tiene una forma idéntica a la que se obtuvo para una línea de carga infinita.

Puesto que cada línea de flujo eléctrico que sale de la carga en el cilindro interior debe terminar en una carga negativa en la superficie interior del cilindro exterior, la carga total en esta superficie debe ser

$$Q_{\text{cilindro exterior}} = -2\pi a L \rho_{S \text{ cilindro interior}}$$

y se encuentra que la carga superficial del cilindro exterior es

$$2\pi b L \rho_{S \text{ cilindro exterior}} = -2\pi a L \rho_{S \text{ cilindro interior}}$$

o

$$\rho_{S \text{ cilindro exterior}} = -\frac{a}{b} \rho_{S \text{ cilindro interior}}$$

¿Qué sucedería si se usara un cilindro de radio ρ , $\rho > b$ para la superficie gaussiana? La carga total encerrada sería entonces cero, por haber cargas iguales y opuestas en cada cilindro conductor. De aquí que,

$$0 = D_S 2\pi\rho L \quad (\rho > b)$$

$$D_S = 0 \quad (\rho > b)$$

Un resultado idéntico se obtendría para $\rho < a$. Entonces, el cable coaxial o condensador no tiene campo externo (con esto se demuestra que el conductor exterior es un “blindaje”), y no hay campo dentro del conductor central.

Este resultado también es útil aunque el cable coaxial tenga una longitud finita y esté abierto en los extremos, a condición de que la longitud L sea mucho mayor que el radio b , de manera que la asimetría en los extremos no afecte apreciablemente la solución. Tal dispositivo se llama también *condensador coaxial*. Ambos, el cable y el condensador coaxial, aparecerán con frecuencia en temas posteriores.

Quizás un ejemplo numérico ayude a aclarar algunos de estos resultados.



Ilustraciones

EJEMPLO 3.2

Considérese un cable coaxial de 50 cm de longitud, con un radio interior de 1 mm y un radio exterior de 4 mm. Se supone que el espacio entre ambos conductores está lleno de aire. La carga total en el conductor interior es 30 nC. Se desea conocer la densidad de carga en cada conductor, así como los campos **E** y **D**.

Solución. Se empieza averiguando la densidad de carga superficial del cilindro interior,

$$\rho_{S \text{ cilindro interior}} = \frac{Q_{\text{cilindro interior}}}{2\pi a L} = \frac{30 \times 10^{-9}}{2\pi (10^{-3})(0.5)} = 9.55 \mu\text{C/m}^2$$

La densidad de carga negativa en la superficie interior del cilindro externo es

$$\rho_{S \text{ cilindro exterior}} = \frac{Q_{\text{cilindro exterior}}}{2\pi b L} = \frac{-30 \times 10^{-9}}{2\pi (4 \times 10^{-3})(0.5)} = -2.39 \mu\text{C/m}^2$$

Por lo tanto, los campos internos pueden calcularse fácilmente:

$$D_\rho = \frac{a_{\rho S}}{\rho} = \frac{10^{-3}(9.55 \times 10^{-6})}{\rho} = \frac{9.55}{\rho} \text{ nC/m}^2$$

y

$$E_\rho = \frac{D_\rho}{\epsilon_0} = \frac{9.55 \times 10^{-9}}{8.854 \times 10^{-12} \rho} = \frac{1.079}{\rho} \text{ V/m}$$

Ambas expresiones se aplican a la región donde $1 < \rho < 4$ mm. Para $\rho < 1$ mm o $\rho > 4$ mm, **E** y **D** son cero.

D3.5 Una carga puntual de $0.25 \mu\text{C}$ se localiza en $r = 0$ y algunas densidades uniformes superficiales de carga se ubican como sigue: 2 mC/m^2 en $r = 1 \text{ cm}$ y -0.6 mC/m^2 en $r = 1.8 \text{ cm}$. Calcular **D** en: a) $r = 0.5 \text{ cm}$; b) $r = 1.5 \text{ cm}$; c) $r = 2.5 \text{ cm}$. d) ¿Qué densidad uniforme superficial de carga deberá haber en $r = 3 \text{ cm}$ para provocar que **D** = 0 en $r = 3.5 \text{ cm}$?

Respuesta: $796a_r \mu\text{C/m}^2$; $977a_r \mu\text{C/m}^2$; $40.8a_r \mu\text{C/m}^2$; $-28.3 \mu\text{C/m}^2$

3.4 Aplicaciones de la ley de Gauss: elemento diferencial de volumen

Ahora se aplicarán los métodos de la ley de Gauss a un tipo de problemas ligeramente distintos, unos que no poseen simetría alguna. A primera vista parecería que nuestro caso es imposible, pues sin simetría no puede elegirse una superficie gaussiana simple para la cual la componente normal de **D** sea constante o cero en todos los lados de la superficie. Sin dicha superficie, la integral no se puede evaluar. Existe sólo una manera de evitar estas dificultades: elegir una superficie muy pequeña cerrada donde **D** sea *casi* constante sobre la superficie y representar un cambio pequeño en **D** adecuadamente usando los primeros dos términos del desarrollo en serie de Taylor para **D**. Lo correcto del resultado se irá mejorando

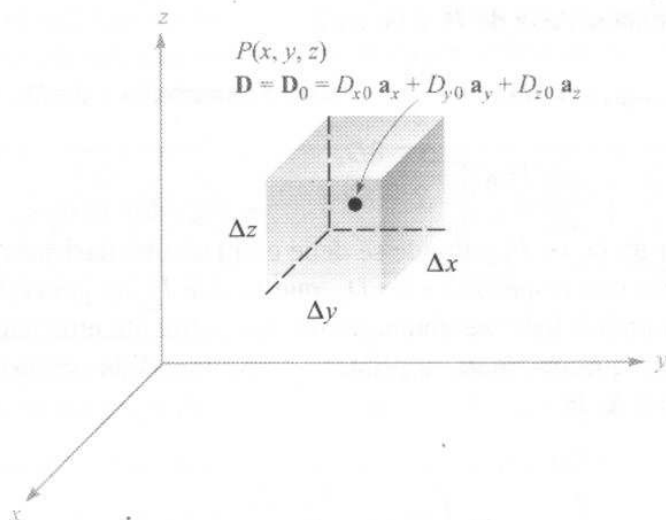


Figura 3.6 Una superficie gaussiana de tamaño diferencial alrededor de un punto P se usa para investigar la razón de cambio espacial de \mathbf{D} en la vecindad de P .

a medida que el volumen encerrado por la superficie gaussiana disminuya, y en algunos casos se llegará hasta el límite, cuando este volumen tiende a cero.

Este ejemplo también difiere de los anteriores en que el valor de \mathbf{D} no se obtendrá como respuesta, sino que en su lugar se adquirirá cierta información extremadamente valiosa acerca de cómo varía \mathbf{D} en la región de la pequeña superficie escogida. Esto lleva a establecer directamente una de las cuatro ecuaciones de Maxwell, que constituyen el fundamento de la teoría electromagnética.

Considérese cualquier punto P , como el de la figura 3.6, localizado en un sistema de coordenadas cartesianas. El valor de \mathbf{D} en el punto P puede expresarse en componentes cartesianas, $\mathbf{D}_0 = D_{x0}\mathbf{a}_x + D_{y0}\mathbf{a}_y + D_{z0}\mathbf{a}_z$. Se elige como superficie cerrada una pequeña caja rectangular, centrada en P , que tiene lados de longitudes Δx , Δy y Δz , y se aplica la ley de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

La evaluación de la integral sobre la superficie cerrada requiere separarla en seis integrales, una sobre cada cara,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{enfrente}} + \int_{\text{posterior}} + \int_{\text{izquierda}} + \int_{\text{derecha}} + \int_{\text{arriba}} + \int_{\text{debajo}}$$

Considérese la primera de ellas en detalle. Puesto que el elemento de superficie es muy pequeño, \mathbf{D} es esencialmente constante (sobre esta porción de toda la superficie cerrada) y

$$\begin{aligned} \int_{\text{enfrente}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{enfrente}} \cdot \Delta\mathbf{S}_{\text{enfrente}} \\ &\doteq \mathbf{D}_{\text{enfrente}} \cdot \Delta y \Delta z \mathbf{a}_x \\ &\doteq D_{x,\text{enfrente}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

donde sólo se tiene que expresar el valor aproximado de D_x para esta cara frontal. La cara frontal está a una distancia $\Delta x/2$ de P , y de aquí,

$$\begin{aligned} D_{x \text{ enfrente}} &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \times \text{razón de cambio a } x \text{ de } D_x \\ &\doteq D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \end{aligned}$$

donde D_{x0} es el valor de D_x en P , y donde se debe emplear una derivada parcial para expresar la razón de cambio con respecto a x de D_x , puesto que D_x en general también varía con y y z . Esta expresión podría haberse obtenido más formalmente empleando sólo el término constante y el término que involucra la primera derivada del desarrollo en serie de Taylor para D_x en la vecindad de P .

Se tiene ahora,

$$\int_{\text{enfrente}} \doteq \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

Se considera ahora la integral sobre la cara posterior,

$$\begin{aligned} \int_{\text{posterior}} &\doteq \mathbf{D}_{\text{posterior}} \cdot \Delta \mathbf{S}_{\text{posterior}} \\ &\doteq \mathbf{D}_{\text{posterior}} \cdot (-\Delta y \Delta z \mathbf{a}_x) \\ &\doteq -D_{x,\text{posterior}} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

y

$$D_{x,\text{posterior}} \doteq D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x}$$

que da,

$$\int_{\text{posterior}} \doteq \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z$$

Si se consideran estas dos integrales, se tiene,

$$\int_{\text{enfrente}} + \int_{\text{posterior}} \doteq \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Al aplicar exactamente el mismo proceso se encuentra que,

$$\int_{\text{derecha}} + \int_{\text{izquierda}} \doteq \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

y

$$\int_{\text{arriba}} + \int_{\text{abajo}} \doteq \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

y estos resultados se pueden reunir para dar:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

o

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v \quad (7)$$

La expresión es una aproximación que resulta mejor conforme Δv se reduce, y en la siguiente sección se dejará que Δv tienda a cero. Por el momento, se ha aplicado la ley de Gauss a la superficie cerrada que rodea el elemento de volumen Δv y se obtiene como resultado la aproximación (7) afirmándose que,

$$\text{Carga encerrada en el volumen } \Delta v \doteq \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \times \text{volumen } \Delta v \quad (8)$$

EJEMPLO 3.3

Encontrar el valor aproximado de la carga total encerrada en un volumen incremental de 10^{-9} m^3 ubicada en el origen, si $\mathbf{D} = e^{-x} \sin y \mathbf{a}_x - e^{-x} \cos y \mathbf{a}_y + 2z \mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$.

Solución. Primero se evalúan las tres derivadas parciales en (8):

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = -e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y} = e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 2$$

En el origen, las dos primeras expresiones son cero y la última es 2. Por lo tanto, se ve que la carga encerrada es un elemento de volumen pequeño que debe ser de aproximadamente $2\Delta v$. Si Δv es 10^{-9} m^3 , entonces se habrán encerrado aproximadamente 2 nC .

D3.6 En el espacio libre sea $\mathbf{D} = 8xyz^4 \mathbf{a}_x + 4x^2z^4 \mathbf{a}_y + 16x^2yz^3 \mathbf{a}_z \text{ pC/m}^2$. a) Encontrar el flujo eléctrico total que pasa a través de la superficie rectangular $z = 2$, $0 < x < 2$, $1 < y < 3$, en la dirección \mathbf{a}_z . b) Encontrar \mathbf{E} en $P(2, -1, 3)$. c) Encontrar un valor aproximado de la carga total contenida en una esfera incremental ubicada en $P(2, -1, 3)$ y que tenga un volumen de 10^{-12} m^3 .

Respuesta: 1365 pC ; $-146.4 \mathbf{a}_x + 146.4 \mathbf{a}_y - 195.2 \mathbf{a}_z \text{ V/m}$; $-2.38 \times 10^{-21} \text{ C}$

3.5 Divergencia

Se obtendrá ahora una relación exacta para (7), que permitirá que el elemento de volumen Δv tienda a cero. Escribiendo esta ecuación como,

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \doteq \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

o, como el límite,

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

donde el signo de aproximación ha sido reemplazado por el de igualdad. Es evidente que el último término es la densidad de carga volumétrica ρ_v , y de aquí que,

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \rho_v \quad (9)$$

Esta ecuación contiene demasiada información para analizarla de inmediato y por ello se escribirá como dos ecuaciones separadas,

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (10)$$

y

$$\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) = \rho_v \quad (11)$$

por ahora se reservará (11) para considerarla en la siguiente sección.

La ecuación (10) no involucra densidad de carga, de manera que los métodos de la sección anterior se pueden aplicar con cualquier vector \mathbf{A} para encontrar $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ sobre una pequeña superficie cerrada, lo cual conduce a,

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (12)$$

donde \mathbf{A} puede representar velocidad, gradiente de temperatura, fuerza o cualquier otro campo vectorial.

Esta ecuación apareció tantas veces en las investigaciones físicas en el último siglo que recibió el nombre descriptivo de *divergencia*. La divergencia \mathbf{A} se define como,

$$\text{Divergencia de } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (13)$$

y se abrevia $\text{div } \mathbf{A}$. La interpretación física de la divergencia de un vector se obtiene describiendo cuidadosamente las operaciones implicadas en el lado derecho de (13), donde \mathbf{A} deberá considerarse como miembro de la familia de vectores de densidades de flujo con el fin de ayudar a la interpretación física.

La divergencia de un vector del tipo densidad de flujo \mathbf{A} es el límite de la cantidad de flujo por unidad de volumen que sale de una pequeña superficie cerrada cuando el volumen tiende a cero.

La interpretación física de la divergencia que proporciona esta afirmación es útil a menudo en la obtención de información cualitativa acerca de la divergencia de un campo vectorial sin recurrir a la investigación matemática. Por ejemplo, considérese la divergencia de la velocidad del agua en una bañera después de que el desagüe ha sido abierto. El flujo de salida neto de agua en *cualquier* superficie cerrada que se encuentre enteramente dentro del agua debe ser cero. El agua es en esencia incompresible, y la cantidad de agua que entra y sale en diferentes regiones de la superficie cerrada debe ser la misma. De aquí que la divergencia de su velocidad sea cero.



Interactivos

Sin embargo, si se considera la velocidad del aire en un tubo perforado con un clavo, se observa que el aire se expande a medida que la presión baja y que en consecuencia hay un flujo neto en cualquier superficie cerrada que se encuentre dentro del interior del tubo. La divergencia de esta velocidad es, por consiguiente, mayor que cero.

Si la divergencia de una cantidad vectorial es positiva indica la existencia de una *fente* de la cantidad vectorial de ese punto. Del mismo modo, una divergencia negativa indica un *sumidero*. Puesto que la divergencia de la velocidad del agua antes mencionada es cero, no existen fuentes o sumideros.³ Sin embargo, el aire al expandirse produce una divergencia positiva de la velocidad y cada punto interior puede considerarse una fuente.

Si se expresa (10) con el nuevo término, se tiene

$$\text{div } \mathbf{D} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \quad (14)$$

Nuevamente esta expresión tiene una forma que no involucra la densidad de carga. En realidad sólo es el resultado de aplicar la definición de la divergencia (13) al elemento diferencial de volumen en *coordenadas cartesianas*.

En caso de haber escogido el volumen diferencial $\rho \, d\rho \, d\phi \, dz$ en coordenadas cilíndricas o $r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ en coordenadas esféricas, se habrían obtenido expresiones para la divergencia en términos de las componentes del vector en el sistema de coordenadas particular, y en términos de las derivadas parciales con respecto a las variables de ese sistema. Estas expresiones se obtienen en el apéndice A y se dan aquí por conveniencia:

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{rectangular}) \quad (15)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (\text{cilíndrica}) \quad (16)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{esférica}) \quad (17)$$

Estas relaciones también se muestran en las últimas páginas del libro.

Debe notarse que la divergencia es una operación que se aplica sobre un vector y cuyo resultado es un escalar. Debe recalarse que, de manera similar, el producto punto, o escalar, era una multiplicación de dos vectores, la cual resultaba un producto escalar.

³ Habiéndose elegido un elemento diferencial de volumen dentro del agua, la disminución gradual en el nivel del agua con el tiempo ocasionará que el elemento de volumen quede encima de la superficie del agua. En el instante en que la superficie del agua intercepta al elemento de volumen, la divergencia se vuelve positiva y el pequeño volumen se convierte en una fuente. Este problema se evita especificando un punto interno.

Por alguna razón resulta común cometer el error, cuando se utiliza la divergencia por primera vez, de impartirle una cualidad vectorial a la operación repartiendo vectores unitarios entre las derivadas parciales. La divergencia simplemente indica *cuánto* flujo sale de un pequeño volumen, por unidad de volumen; no se asocia ninguna dirección con ella.

Se puede ilustrar el concepto de divergencia continuando con el ejemplo del final de la sección 3.4.

EJEMPLO 3.4

Encontrar $\text{div } \mathbf{D}$ en el origen si $\mathbf{D} = e^{-x} \sin y \mathbf{a}_x - e^{-x} \cos y \mathbf{a}_y + 2z \mathbf{a}_z$.

Solución. Utilizando (14) y (15) se obtiene

$$\begin{aligned}\text{div } \mathbf{D} &= \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ &= -e^{-x} \sin y + e^{-x} \sin y + 2 = 2\end{aligned}$$

Sin considerar la ubicación, el valor es la constante 2.

Si las unidades de \mathbf{D} son C/m^2 , entonces las unidades de $\text{div } \mathbf{D}$ son C/m^3 . Ésta es una densidad de carga volumétrica cuyo concepto se estudiará en la sección siguiente.

D3.7 Encontrar el valor numérico de la divergencia de \mathbf{D} en los puntos indicados si: a) $\mathbf{D} = (2xyz - y^2)\mathbf{a}_x + (x^2z - 2xy)\mathbf{a}_y + x^2y\mathbf{a}_z$ C/m^2 en $P_A(2, 3, -1)$; b) $\mathbf{D} = 2\rho z^2 \sin^2 \phi \mathbf{a}_\rho + \rho z^2 \sin 2\phi \mathbf{a}_\phi + 2\rho^2 z \sin^2 \phi \mathbf{a}_z$ C/m^2 en $P_B(\rho = 2, \phi = 110^\circ, z = -1)$; c) $\mathbf{D} = 2r \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_r + r \cos \theta \cos \phi \mathbf{a}_\theta - r \sin \phi \mathbf{a}_\phi$ C/m^2 en $P_C(r = 1.5, \theta = 30^\circ, \phi = 50^\circ)$.

Respuesta: -10.00; 9.06; 1.29

3.6 Primera ecuación de Maxwell (electrostática)

Ahora se desea consolidar lo aprendido en las dos últimas secciones y proporcionar una interpretación de la operación de la divergencia en su relación con el flujo eléctrico. Las expresiones desarrolladas pueden expresarse como:

$$\text{div } \mathbf{D} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} \quad (18)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \quad (19)$$

y

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_v \quad (20)$$

La primera ecuación es la definición de divergencia; la segunda es el resultado de aplicar la definición a un elemento diferencial de volumen en coordenadas cartesianas, con lo que se obtiene una ecuación por medio de la cual puede evaluarse la divergencia de un vector expresada en

coordenadas cartesianas; y la tercera es simplemente (11) expresada usando el nuevo término $\text{div } \mathbf{D}$. La ecuación (20) es casi un resultado obvio si se ha obtenido alguna familiaridad con el concepto de divergencia definido por (18), puesto que, dada la ley de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

se obtiene, por unidad de volumen,

$$\frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \frac{Q}{\Delta v}$$

A medida que el volumen tiende a cero,

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v}$$

En esta expresión debe verse la $\text{div } \mathbf{D}$ a la izquierda y la densidad de carga volumétrica a la derecha,

$$\boxed{\text{div } \mathbf{D} = \rho_v} \quad (20)$$

Ésta es la primera de las cuatro ecuaciones de Maxwell como se aplican en la electrostática y los campos magnéticos estables, y establece que el flujo eléctrico por unidad de volumen que sale de un pequeño volumen unitario es exactamente igual a la densidad de carga volumétrica que existe en él. Esta ecuación se llama atinadamente *forma puntual de la ley de Gauss*. La ley de Gauss relaciona el flujo que sale de cualquier superficie cerrada con la carga encerrada, y la primera ecuación de Maxwell establece exactamente lo mismo, pero la hace por unidad de volumen y para un volumen que se hace cada vez más pequeño y que en el límite se reduce a un punto. Cuando se considera que la divergencia se puede expresar como la suma de tres derivadas parciales, la primera ecuación de Maxwell también se conoce como la forma diferencial de la ley de Gauss, e inversamente, la ley de Gauss se reconoce como la forma integral de la primera ecuación de Maxwell.

Como ejemplo específico, considérese la divergencia de \mathbf{D} en la región cercana a una carga puntual Q localizada en el origen. Se tiene el campo

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r$$

y utilizando (17), la expresión para la divergencia en coordenadas esféricas dada en la sección 3.5:

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (D_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi}$$

Puesto que D_θ y D_ϕ son cero, se tiene,

$$\text{div } \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{Q}{4\pi r^2} \right) = 0 \quad (\text{si } r \neq 0)$$

Entonces, $\rho_v = 0$ en todas partes excepto en el origen, donde es infinita.

La operación de la divergencia no se limita a la densidad de flujo; se puede aplicar a cualquier campo vectorial. Se aplicará a algunos conceptos electromagnéticos en los capítulos posteriores.

D3.8 Encontrar una expresión para la densidad de carga volumétrica asociada con cada uno de los siguientes campos: a) $\mathbf{D} = \frac{4xy}{z} \mathbf{a}_x + \frac{2x^2}{y} \mathbf{a}_y - \frac{2x^2y}{z^2} \mathbf{a}_z$; b) $\mathbf{D} = z \sin \phi \mathbf{a}_\rho + z \cos \phi \mathbf{a}_\phi + \rho \sin \phi \mathbf{a}_z$; c) $\mathbf{D} = \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + \cos \phi \mathbf{a}_\phi$.

Respuesta: $\frac{4y}{z^3}(x^2 + z^2)$; 0; 0

3.7 El operador vectorial ∇ y el teorema de la divergencia

Si nuevamente se recuerda que la divergencia es una operación sobre un vector, que da como resultado un escalar, al igual que el producto punto de dos vectores que da un escalar, parece posible encontrar algo que pudiera “puntearse” formalmente con \mathbf{D} para producir el escalar

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Obviamente, esto no puede hacerse aplicando un *producto* punto; el proceso debe ser una *operación* punto.

Con esto en mente, se define el *operador “nabla”* ∇ como un *operador vectorial*.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (21)$$

Aparecen *operadores escalares* semejantes en varios métodos de soluciones de ecuaciones diferenciales donde con frecuencia D reemplaza a d/dx , D^2 a d^2/dx^2 , y así sucesivamente.⁴ Se conviene al definir ∇ (dígase “nabla”) que se le trate como un vector ordinario con la importante excepción de que resultan derivadas parciales en vez de productos de escalares.

Considérese que $\nabla \cdot \mathbf{D}$ significa,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) \cdot (D_x \mathbf{a}_x + D_y \mathbf{a}_y + D_z \mathbf{a}_z)$$

Primero considérense los productos punto de los vectores unitarios, descartando los seis términos que son cero. Así se tiene

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(D_x) + \frac{\partial}{\partial y}(D_y) + \frac{\partial}{\partial z}(D_z)$$

donde los paréntesis pueden suprimirse para operar o diferenciar:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Reconocemos éstos como la divergencia de \mathbf{D} , así que

$$\text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

⁴ Este operador escalar D , que no volverá a aparecer en el texto, no debe confundirse con la densidad de flujo eléctrico.

El uso de $\nabla \cdot \mathbf{D}$ es mucho más común que $\text{div } \mathbf{D}$, aunque ambos tienen sus ventajas. Mediante el uso de $\nabla \cdot \mathbf{D}$ se pueden obtener simple y rápidamente las derivadas parciales correctas, pero sólo en coordenadas cartesianas, como se verá más adelante. Por otro lado, $\text{div } \mathbf{D}$ es un excelente recordatorio de la interpretación física de la divergencia. Se utilizará la notación del operador $\nabla \cdot \mathbf{D}$ de ahora en adelante para indicar la operación de divergencia.

El operador vectorial ∇ no sólo se usa con las divergencias, sino que aparecerá en muchas otras operaciones importantes, como veremos más adelante. Una de éstas es ∇u , donde u es cualquier campo escalar, y que da como resultado

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{a}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{a}_z$$

El operador ∇ no tiene una forma específica en otros sistemas de coordenadas. Si se considera \mathbf{D} en coordenadas cilíndricas, entonces $\nabla \cdot \mathbf{D}$ sigue indicando la divergencia de \mathbf{D} , o

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

Esta expresión se ha tomado de la sección 3.5. No se tiene una forma propia de ∇ que ayude a obtener esta suma de derivadas parciales. Esto significa que ∇u , hasta ahora sin nombre pero fácilmente expresada antes en coordenadas cartesianas, no puede expresarse por ahora en coordenadas cilíndricas. Así que esta expresión se obtendrá cuando se defina ∇u en el capítulo 4.

Este estudio sobre la divergencia finalizará la presentación de un teorema que se necesitará varias veces en capítulos posteriores: el *teorema de la divergencia*. Este teorema se aplica a cualquier campo vectorial para el cual existen las derivadas parciales apropiadas, aunque será más sencillo establecerlo por medio de la densidad de flujo eléctrico. De hecho, ya se ha obtenido y ahora queda poco por hacer, excepto señalarlo y nombrarlo, empezando desde la ley de Gauss,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

sea,

$$Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv$$

se reemplaza entonces ρ_v por su equivalente,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

se tiene,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q = \int_{\text{vol}} \rho_v dv = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} dv$$

La primera y última expresiones constituyen el teorema de la divergencia,

$$\boxed{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} dv} \quad (22)$$

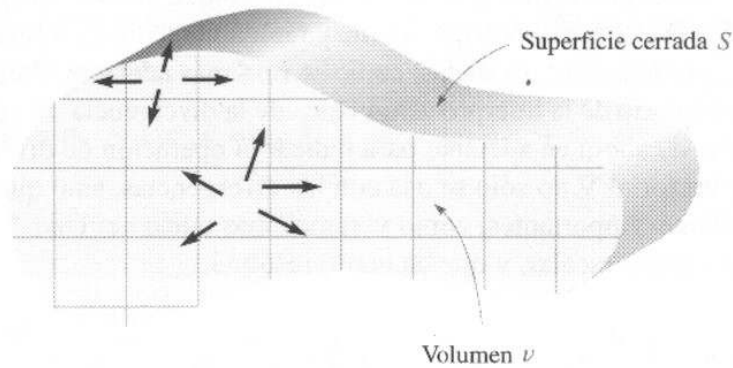


Figura 3.7 El teorema de la divergencia establece que el flujo total que atraviesa la superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de la densidad de flujo en todo el interior del volumen cerrado. El volumen se muestra aquí en un corte transversal.

el cual se puede enunciar como sigue:

La integral de la componente normal de cualquier campo vectorial sobre una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial a través del volumen encerrado por la superficie cerrada.

De nuevo debe remarcarse que el teorema de la divergencia es válido para cualquier campo vectorial, aunque se obtuvo específicamente para la densidad del flujo eléctrico \mathbf{D} , y después se tendrá la ocasión de aplicarlo a varios campos diferentes. Los beneficios derivados de este hecho son que se relaciona una triple integración *sobre algún volumen* con una doble integración *sobre la superficie* que encierra ese volumen. Por ejemplo, es mucho más fácil explicar la agitación de un líquido que llena una botella buscando fugas en la superficie de la botella que calculando la velocidad del líquido en cada punto del interior.

El teorema de la divergencia se vuelve obvio físicamente si se considera un volumen v , mostrado en un corte transversal en la figura 3.7, al cual lo rodea una superficie cerrada S . Se divide el volumen en un número de compartimientos pequeños de tamaño diferencial; si se considera una de las celdas, se observa que el flujo divergente desde ella *entra* o *converge* en las celdas adyacentes a menos que la celda considerada contenga una porción de la superficie exterior. En resumen, la divergencia de la densidad de flujo en todo el interior de un volumen conduce al mismo resultado que la determinación del flujo neto que atraviesa la superficie que lo encierra.

Para ilustrar el teorema de divergencia, considérese este ejemplo.

EJEMPLO 3.5

Evaluar ambos lados del teorema de divergencia para el campo $\mathbf{D} = 2xy\mathbf{a}_x + x^2\mathbf{a}_y$ C/m² y el paralelepípedo rectangular que forman los planos $x = 0$ y 1 , $y = 0$ y 2 y $z = 0$ y 3 .

Solución. Evaluando en primer término la integral de superficie, se puede notar que \mathbf{D} es paralelo a las superficies en $z = 0$ y $z = 3$, por lo que $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ahí. Para las cuatro superficies restantes se tiene

$$\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=0} \cdot (-dy dz \mathbf{a}_x) + \int_0^3 \int_0^2 (\mathbf{D})_{x=1} \cdot (dy dz \mathbf{a}_x) \\
&\quad + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=0} \cdot (-dx dz \mathbf{a}_y) + \int_0^3 \int_0^1 (\mathbf{D})_{y=2} \cdot (dx dz \mathbf{a}_y) \\
&= - \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=0} dy dz + \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy dz \\
&\quad - \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=0} dx dz + \int_0^3 \int_0^1 (D_y)_{y=2} dx dz
\end{aligned}$$

Sin embargo, como $(D_x)_{x=0} = 0$ y $(D_y)_{y=0} = (D_y)_{y=2}$, se reduce a:

$$\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^3 \int_0^2 (D_x)_{x=1} dy dz = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz \\
&= \int_0^3 4 dz = 12
\end{aligned}$$

Puesto que

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) = 2y$$

la integral de volumen se convierte en:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{vol}} \nabla \cdot \mathbf{D} dv &= \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 2y dx dy dz = \int_0^3 \int_0^2 2y dy dz \\
&= \int_0^3 4 dz = 12
\end{aligned}$$

y la demostración ha concluido. Si se recuerda, cuando se utilizó la ley de Gauss también se determinó que una carga total de 12 C estaba dentro del mismo paralelepípedo.

D3.9 Dada la densidad de flujo $\mathbf{D} = 6\rho \sin \frac{1}{2}\phi \mathbf{a}_\rho + 1.5\rho \cos \frac{1}{2}\phi \mathbf{a}_\phi$ C/m², evaluar los dos lados del teorema de divergencia para la región definida por $\rho = 2$, $\phi = 0$, $\phi = \pi$, $z = 0$ y $z = 5$.

Respuesta: 225; 225

Lecturas complementarias

1. Kraus, J. D., y D. A. Fleisch, *Electromagnetics*, 5a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1999. El campo electrostático en el espacio libre se presenta en el capítulo 2.
2. Plonsey, R. y R. E. Collin, *Principles and Applications of Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill, Nueva York, 1961. El nivel de este libro es un poco más elevado que el que se está leyendo ahora, pero es un excelente texto para ser leído "enseguida". La ley de Gauss aparece en el segundo capítulo.

3. Plonus, M. A., *Applied Electromagnetics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1978. Este libro contiene descripciones bastante detalladas de varios dispositivos prácticos que ilustran las aplicaciones electromagnéticas. Por ejemplo, véase el estudio de la xerografía en las pp. 95-98 como una aplicación de la electrostática.
4. Skilling, H. H., *Fundamentals of Electric Waves*, 2a. ed., John Wiley and Sons, Nueva York, 1948. Las operaciones de cálculo vectorial están bien presentadas. La divergencia se analiza en las pp. 22 y 38. La lectura del capítulo 1 resulta interesante.
5. Thomas, G. B., Jr. y R. L. Finney (véanse las lecturas recomendadas del capítulo 1). El teorema de la divergencia se desarrolla y ejemplifica desde varios puntos de vista en las pp. 976-980.

Problemas



- 3.1 Un bote metálico de pintura, vacío, se coloca sobre una mesa de mármol, la tapa se retira y ambas partes se descargan eléctricamente haciendo tierra. Se pega un hilo de nailon en el centro de la tapa, y se adhieren al hilo una moneda de 1 centavo, otra de 5 y una más de 10 centavos, sin que se toquen una con otra. A la moneda de 5 centavos se le da una carga de $+5 \text{ nC}$, mientras que las otras dos permanecen descargadas. Todo este arreglo se baja dentro del bote de modo que las monedas cuelguen sin tocar las paredes y se asegura la tapa. El exterior del bote se pone momentáneamente haciendo tierra. El dispositivo se desarma cuidadosamente con guantes y herramientas aislantes. a) ¿Qué cargas se encuentran en cada una de las cinco piezas metálicas? b) Si a la moneda de 1 centavo se le ha dado una carga de $+2 \text{ nC}$ y a la de 5 centavos una carga de -1 nC , ¿cuál sería el arreglo final de cargas?
- 3.2 Una carga puntual de 20 nC se encuentra en $(4, -1, 3)$ y una carga lineal uniforme de -25 nC/m se extiende a lo largo de la intersección de los planos $x = -4$ y $z = 6$. a) Calcular \mathbf{D} en $(3, -1, 0)$. b) ¿Qué cantidad de flujo eléctrico abandona la superficie de una esfera de radio 5 y con centro en el origen? c) Repetir la parte b si el radio de la esfera es de 10.
- 3.3 La superficie cilíndrica $\rho = 8 \text{ cm}$ contiene una densidad de carga superficial $\rho_s = 5e^{-20|z|} \text{ nC/m}^2$. a) ¿Cuál es la cantidad de carga presente? b) ¿Qué cantidad de flujo eléctrico abandona la superficie $\rho = 8 \text{ cm}$, $1 \text{ cm} < z < 5 \text{ cm}$, $30^\circ < \phi < 90^\circ$?
- 3.4 En coordenadas cilíndricas sea $\mathbf{D} = (\rho \mathbf{a}_\rho + z \mathbf{a}_z)/[4\pi(\rho^2 + z^2)^{1.5}]$. Determinar el flujo total que abandona: a) la superficie cilíndrica $\rho = 7$ de longitud infinita; b) el cilindro finito, $\rho = 7$, $|z| \leq 10$.
- 3.5 Sea $\mathbf{D} = 4xy\mathbf{a}_x + 2(x^2 + z^2)\mathbf{a}_y + 4yz\mathbf{a}_z \text{ C/m}^2$. Evaluar las integrales de superficie y encontrar la carga total encerrada en el paralelepípedo rectangular $0 < x < 2$, $0 < y < 3$, $0 < z < 5 \text{ m}$.
- 3.6 Un volumen de carga de densidad constante $\rho_v = \rho_0$ está en el espacio libre dentro de la región $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, y $-d/2 < z < d/2$. Encontrar \mathbf{D} y \mathbf{E} en cualquier parte.
- 3.7 Una densidad volumétrica de carga se encuentra en el espacio libre como $\rho_v = 2e^{-1000r} \text{ nC/m}^3$ para $0 < r < 1 \text{ mm}$ y $\rho_v = 0$ en cualquier otra parte. a) Encontrar la carga total encerrada por la superficie esférica $r = 1 \text{ mm}$. b) Utilizando la ley de Gauss, calcular el valor de D_r sobre la superficie $r = 1 \text{ mm}$.

- 3.8** Aplicar la ley de Gauss en su forma integral para demostrar que un campo de distancia inversa en coordenadas esféricas, $\mathbf{D} = A\mathbf{a}_r/r$, donde A es una constante, requiere que cada círculo esférico de 1 m de ancho contenga $4\pi A$ coulombs de carga. ¿Esto indica una distribución de carga continua? Si es así, encontrar la variación de la densidad de carga con r .
- 3.9** Una densidad de carga volumétrica uniforme de $80 \mu\text{C}/\text{m}^3$ está presente en la región $8 \text{ mm} < r < 10 \text{ mm}$. Sea $\rho_v = 0$ para $0 < r < 8 \text{ mm}$. a) Encontrar la carga total dentro de la superficie esférica $r = 10 \text{ mm}$. b) Encontrar D_r en $r = 10 \text{ mm}$. c) Si no existe carga en $r > 10 \text{ mm}$, encontrar D_r en $r = 20 \text{ mm}$.
- 3.10** Una densidad de carga volumétrica en coordenadas esféricas varía como $\rho_v = (\rho_0 \text{ sen } \pi r)/r^2$, donde ρ_0 es una constante. Encontrar las superficies en las que $\mathbf{D} = 0$.
- 3.11** Sea $\rho_v = 0$ para $\rho < 1 \text{ mm}$, $\rho_v = 2 \text{ sen}(2000 \pi \rho) \text{ nC}/\text{m}^3$ para $1 \text{ mm} < \rho < 1.5 \text{ mm}$ y $\rho_v = 0$ para $\rho > 1.5 \text{ mm}$ en coordenadas cilíndricas. Encontrar \mathbf{D} en cualquier lugar.
- 3.12** El Sol radia una potencia total de $2 \times 10^{26} \text{ watts (W)}$. Si se pudiera determinar la latitud y longitud de la superficie del Sol y se pudiera suponer una radiación uniforme, a) ¿qué potencia radiaría la región cuya latitud fuera 50° N y 60° N y una longitud de 12° O y 27° O ? b) ¿Cuál es la densidad de potencia sobre una superficie esférica a una distancia de 93 000 000 millas del Sol en W/m^2 ?
- 3.13** Tres superficies esféricas ubicadas en $r = 2, 4$ y 6 m tienen densidades uniformes de superficie de carga de $20 \text{ nC}/\text{m}^2$, $-4 \text{ nC}/\text{m}^2$ y ρ_{s0} , respectivamente. a) Encontrar \mathbf{D} en $r = 1, 3$ y 5 m . b) Determinar ρ_{s0} tal que $\mathbf{D} = 0$ en $r = 7 \text{ m}$.
- 3.14** Una fuente de luz dentro de una esfera translúcida de 20 cm de diámetro genera una densidad de flujo luminoso de $1000 \cos^2(\theta/2)\mathbf{a}_r$ lumens/ m^2 en la superficie de la esfera. a) ¿En qué dirección es mínima la densidad de flujo? b) Determinar el ángulo $\theta = \theta_0$ en el que la densidad de flujo es la mitad de su máximo valor. c) Determinar el ángulo $\theta = \theta_1$ tal que la mitad del flujo total de luz se emita dentro del cono $\theta < \theta_1$.
- 3.15** Una densidad volumétrica de carga está localizada de la forma siguiente: $\rho_v = 0$ para $\rho < 1 \text{ mm}$ y para $\rho > 2 \text{ mm}$, $\rho_v = 4\rho \mu\text{C}/\text{m}^3$ para $1 < \rho < 2 \text{ mm}$. a) Calcular la carga total en la región $0 < \rho < \rho_1$, $0 < z < L$, donde $1 < \rho_1 < 2 \text{ mm}$. b) Utilizar la ley de Gauss para determinar D_ρ en $\rho = \rho_1$. c) Evaluar D_ρ en $\rho = 0.8 \text{ mm}$, 1.6 mm y 2.4 mm .
- 3.16** Una densidad volumétrica de carga en coordenadas esféricas de $\rho_v = 10e^{-2r} \text{ C}/\text{m}^3$ se encuentra presente. a) Determinar \mathbf{D} . b) Verificar el resultado del inciso a) evaluando $\nabla \cdot \mathbf{D}$.
- 3.17** Un cubo está definido por $1 < x, y, z < 1.2$. Si $\mathbf{D} = 2x^2y\mathbf{a}_x + 3x^2y^2\mathbf{a}_y \text{ C}/\text{m}^2$. a) Aplicar la ley de Gauss para encontrar el flujo total que abandona la superficie cerrada del cubo. b) Evaluar $\nabla \cdot \mathbf{D}$ en el centro del cubo. c) Estimar la carga total encerrada dentro del cubo utilizando la ecuación (8).
- 3.18** Determinar si la divergencia de los campos vectoriales siguientes es positiva, negativa o cero: a) el flujo de energía térmica en $\text{J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ en cualquier punto de un cubo de hielo; b) la densidad de corriente en A/m^2 en una barra donde fluya corriente directa; c) la velocidad de flujo de masa en $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ bajo la superficie del agua contenida en una palangana donde el agua circule en sentido de las manecillas del reloj mirándola desde arriba.

- 3.19** Una superficie esférica de radio igual a 3 mm y centro en $P(4, 1, 5)$ está en el espacio libre. Sea $\mathbf{D} = x\mathbf{a}_x$ C/m². Utilizar los resultados de la sección 3.4 para calcular el flujo eléctrico neto que abandona la superficie de la esfera.
- 3.20** Suponer que la densidad de flujo eléctrico en coordenadas cilíndricas es $\mathbf{D} = D_\rho \mathbf{a}_\rho$. Describir la dependencia de la densidad de carga ρ_v en coordenadas ρ , ϕ y z si a) $D_\rho = f(\phi, z)$; b) $D_\rho = (1/\rho)f(\phi, z)$; c) $D_\rho = f(\rho)$.
- 3.21** Calcular $\nabla \cdot \mathbf{D}$ en el punto especificado si a) $\mathbf{D} = (1/z^2)[10xyz \mathbf{a}_x + 5x^2z \mathbf{a}_y + (2z^3 - 5x^2y)\mathbf{a}_z]$ en el punto $P(-2, 3, 5)$; b) $\mathbf{D} = 5z^2 \mathbf{a}_\rho + 10\rho z \mathbf{a}_z$ en $P(3, -45^\circ, 5)$; c) $\mathbf{D} = 2r \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_r + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{a}_\theta + r \cos \phi \mathbf{a}_\phi$ en $P(3, 45^\circ, -45^\circ)$.
- 3.22** a) Un campo de densidad de flujo está dado por $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{a}_z$. Evaluar el flujo saliente de \mathbf{F}_1 a través de la superficie hemisférica, $r = a$, $0 < \theta < \pi/2$, $0 < \phi < 2\pi$. b) ¿Qué observación sencilla hubiera ahorrado mucho trabajo en la parte a)? c) Suponer que el campo está dado por $\mathbf{F}_2 = 5z\mathbf{a}_z$. Utilizando las integrales de superficie apropiadas, evaluar el flujo neto de salida de \mathbf{F}_2 a través de la superficie cerrada formada por el hemisferio de la parte a) y su base circular en el plano xy . d) Repetir la parte c) utilizando el teorema de la divergencia y la integral de volumen apropiada.
- 3.23** a) Una carga puntual Q está en el origen. Demostrar que $\text{div } \mathbf{D}$ es cero en cualquier parte que no sea el origen. b) Reemplazar la carga puntual con una densidad de carga volumétrica uniforme de ρ_{v0} para $0 < r < a$. Establecer una relación entre ρ_{v0} y Q y a de tal forma que la carga total sea la misma. Encontrar $\text{div } \mathbf{D}$ en cualquier punto.
- 3.24** a) Una densidad lineal de carga uniforme ρ_L se extiende a lo largo del eje z . Demostrar que $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ en cualquier parte excepto en la línea de carga. b) Reemplazar la línea de carga por una densidad de carga volumétrica uniforme ρ_0 en $0 < \rho < a$. Establezca una relación entre ρ_0 y ρ_L de tal forma que la carga por unidad de longitud sea la misma. Encuentre $\nabla \cdot \mathbf{D}$ en cualquier otro punto.
- 3.25** Dentro de la órbita esférica definida por $3 < r < 4$ m, la densidad de flujo eléctrico está dada por $\mathbf{D} = 5(r - 3)^3 \mathbf{a}_r$ C/m². a) ¿Cuál es la densidad volumétrica de carga en $r = 4$? b) ¿Cuál es la densidad de flujo eléctrico en $r = 4$? c) ¿Qué cantidad de flujo eléctrico abandona la esfera en $r = 4$? d) ¿Cuánta carga está contenida en la esfera $r = 4$?
- 3.26** Si se tiene un gas perfecto con una densidad de masa ρ_m kg/m³, y se asigna una velocidad \mathbf{U} m/s a cada elemento diferencial, entonces la velocidad de flujo de masa es $\rho_m \mathbf{U}$ kg/(m² · s). El razonamiento físico lleva entonces a la ecuación de continuidad, $\nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = -\partial \rho_m / \partial t$. a) Explicar la interpretación física de esta ecuación. b) Demostrar que $\oint_S \rho_m \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} = -dM/dt$, donde M es la masa total del gas dentro de la superficie cerrada constante S , y explicar el significado físico de la ecuación.
- 3.27** Sea $\mathbf{D} = 5.00r^2 \mathbf{a}_r$ mC/m² para $r \leq 0.08$ m y $\mathbf{D} = 0.205 \mathbf{a}_r / r^2$ $\mu\text{C}/\text{m}^2$ para $r \geq 0.08$ m. a) Encontrar ρ_v para $r = 0.06$ m. b) Encontrar ρ_v para $r = 0.1$ m. c) ¿Qué densidad de superficie de carga podrá ubicarse en $r = 0.08$ m para que $\mathbf{D} = 0$ en $r > 0.08$ m?
- 3.28** Repetir el problema 3.8, utilizando $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$ y tomando una integral volumétrica apropiada.
- 3.29** En una región del espacio libre se encuentra el volumen $2 < x, y, z < 3$, $\mathbf{D} = \frac{2}{z^2}(yz \mathbf{a}_x + xz \mathbf{a}_y - 2xy \mathbf{a}_z)$ C/m². a) Evaluar el lado de la integral volumétrica del teorema de divergencia para el volumen definido aquí. b) Evaluar el lado de la integral de superficie para la superficie cerrada correspondiente.

- 3.30 Sea $\mathbf{D} = 20\rho^2 \mathbf{a}_\rho$ n/Cm². a) ¿Cuál es la densidad volumétrica de carga en el punto $P(0.5, 60^\circ, 2)$? b) Utilizar dos métodos diferentes para encontrar la cantidad de carga dentro de la superficie cerrada limitada por $\rho = 3$, $0 \leq z \leq 2$.
- 3.31 Dada la densidad de flujo $\mathbf{D} = \frac{16}{r} \cos(2\theta) \mathbf{a}_\theta$ C/m², utilizar dos métodos diferentes para encontrar la carga total dentro de la región $1 < r < 2$ m, $1 < \theta < 2$ rad, $1 < \phi < 2$ rad.